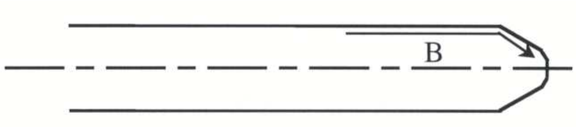
Serie 9

1. Polschuhmagnet

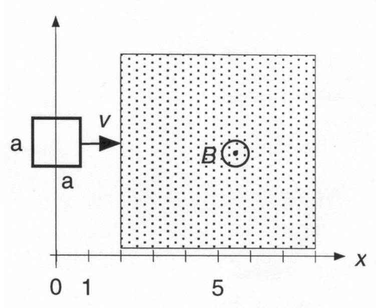
Wir betrachten einen Polschuhmagneten. Weit entfernt von der Spitze sei die Magnetisierung $\vec{M}$ im Magneten homogen. An der Spitze haben die Feldlinien folgenden Verlauf:



Berechnen Sie das Feld weit weg von der Spitze im Magneten und direkt an der Spitze. Was ergibt sich für den Idealfall einer punktförmigen Spitze?
Tipp: Die Feldlinien bleiben innerhalb des Materials und treten nur an der Spitze aus.

2. Induktion

Eine quadratische Drahtschleife mit Widerstand R und Seitenlänge a wird mit der Geschwindigkeit v durch ein dazu senkrecht stehendes, begrenztes Magnetfeld $\vec{B}$ gezogen.



a. Wie sieht der Verlauf des Stromes $I(x)$ in Abhängigkeit des Weges aus?

b. Wie gross ist der maximale Strom?

Hausaufgaben

3. Spule mit Metallring

Eine unendlich lange Spule entlang der z-Achse mit N Windungen pro Meter wird an den Strom $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ angeschlossen. In der x-y-Ebene innerhalb der Spule befindet sich ein Metallring mit Radius R.

a. Wie ist der zeitliche Verlauf des Magnetfelds innerhalb der Spule?

b. Wodurch entsteht ein zum Ring tangential gerichtetes $\vec{E}$-Feld? Wie gross ist es?

c. Berechnen Sie den zeitlichen Mittelwert von $|E(R,t)|^2$ und skizzieren Sie ihn als Funktion von ω.

4. Wirbelströme

Gegeben sei eine Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$.
Zeigen Sie, dass das daraus entstehende Magnetfeld $\vec{B}$ die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \triangle \vec{B}$$

erfüllt, wenn $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ gesetzt und der Term $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ in der vierten Maxwell-Gleichung vernachlässigt wird.

Semesterübungen für Studierende der Physik

In den folgenden drei Aufgaben verwenden wir Hilfsfelder, die im separat abgegebenen Anhang zur Vorlesung vorgestellt werden. Diese Hilfsfelder sind nicht die physikalisch messbaren Felder, erleichtern aber in einigen Fällen die Bestimmung der physikalisch messbaren elektrischen Felder und Magnetfelder. Wir können entweder mit diesen Hilfsfeldern oder mit effektiven Ladungs- und Stromdichten rechnen. Je nach Problem ist die eine oder die andere Formulierung geeignet. In beiden Formulierungen können wir die Felder über Integrale bestimmen. Diese Gleichungen sind gültig für lokal begrenzte Ladungs- und Stromdichten. Bei unendlich ausgedehnten Geometrien können allerdings Komplikationen auftreten. Im Fall von unendlich ausgedehnten Geometrien empfiehlt sich daher die Verwendung der differenziellen Formeln. Diese Formeln setzen lokal verschiedene Grössen zueinander in Beziehung und sind auch im Fall unendlich ausgedehnter Geometrien gültig. Sie erlauben dann zusammen mit Symmetriebetrachtungen die Bestimmung der elektrischen Felder, beziehungsweise der Magnetfelder.
In allen Aufgaben sei die Stromdichte der freien Ladungen $\vec{J}_{\text{frei}} = 0$.

5. Energie einer Magnetisierungsverteilung

A useful starting point for finding the magnetostatic energy of a continuous static distribution $\vec{M}(\vec{x})$ are the Maxwell equations of magnetostatics: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ and $\vec{\nabla} \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = 0$. These equations can be reduced to the equations of the electrostatics of a magnetic charge density $-\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$ by defining a further magnetic field $\vec{H}$ as $\vec{H} \doteq \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$. The field $\vec{H}$ obeys the equations[1]

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{H} &= -\vec{\nabla}\vec{M} \quad , \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

[1] Note that due to the absence of free current densities the field $\vec{H}$ here is equal to the field $\vec{H}_g$ of the appendix.

These Maxwell equations now correspond to the Poisson equation of an "effective magnetic charge" $\rho_M \doteq -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$ and a "magnetic potential" Φ_M with $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_M$:

$$\nabla^2 \Phi_M = -\rho_M \quad .$$

Thus, the magnetostatic problem has been transformed into an electrostatic problem involving charges ρ_M. By analogy, the total magnetostatic energy amounts to

$$E_M = \frac{\mu_0}{8\pi} \int d^3x d^3y \frac{\rho_M(\vec{x})\rho_M(\vec{y})}{\mid \vec{x} - \vec{y} \mid} \quad .$$

Use this equation to derive the following equivalent expressions for the magnetostatic energy of a localized distribution of permanent magnetization:

a.

$$E_M = \frac{\mu_0}{2} \int d^3x \vec{H}^2(\vec{x}) \quad .$$

b. Using the identity $\int d^3x \vec{H} \cdot \vec{B} = 0$, holding for a localized distribution $\vec{M}(\vec{x})$, show that

$$E_M = -\frac{\mu_0}{2} \int d^3x \vec{H} \cdot \vec{M}$$

and

$$E_M = \frac{\mu_0}{2} \int d^3x \vec{M}^2(\vec{x}) - \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x \vec{B}^2 \quad .$$

c.

$$E_M = \frac{\mu_0}{2} \int d^3x \vec{M}^2(\vec{x}) - \frac{\mu_0}{8\pi} \int d^3x d^3y \frac{\vec{J}_M(\vec{x})\vec{J}_M(\vec{y})}{\mid \vec{x} - \vec{y} \mid}$$

with $\vec{J}_M = \mathrm{rot}\vec{M}$.

All the integrals extend over the whole space.

6. Elektrostatik mit Hilfsfeldern

Man berechne das elektrische Feld von Polarisationsverteilungen unterschiedlicher Geometrie. Dazu benütze man im Fall unendlich ausgedehnter Geometrien diejenigen differenziellen Formeln, die das elektrische Feld oder die dielektrische Verschiebung in geeigneter Weise mit der Polarisation verbinden.

a. Ferroelektrischer Halbraum

   i. Die Polarisation sei homogen und senkrecht zur Grenzfläche gerichtet.

   ii. Die Polarisation sei homogen und parallel zur Grenzfläche gerichtet.

b. Ferroelektrische Platte

   i. Die Polarisation sei homogen und senkrecht zur Platte gerichtet.
   ii. Die Polarisation sei homogen und parallel zur Platte gerichtet.

c. Ferroelektrische Kugel

   i. Die Polarisation sei radial gerichtet.

7. Magnetostatik mit Hilfsfeldern

Man berechne das Magnetfeld von Magnetisierungsverteilungen unterschiedlicher Geometrie. Dazu benütze man im Fall unendlich ausgedehnter Geometrien diejenigen differenziellen Formeln, die das $\vec{B}$-Feld oder das $\vec{H}$-Feld in geeigneter Weise mit der Magnetisierung verbinden.

a. Ferromagnetischer Halbraum

   i. Die Magnetisierung sei homogen und senkrecht zur Grenzfläche gerichtet.
   ii. Die Magnetisierung sei homogen und parallel zur Grenzfläche gerichtet.

b. Ferromagnetische Platte

   i. Die Magnetisierung sei homogen und senkrecht zur Platte gerichtet.
   ii. Die Magnetisierung sei homogen und parallel zur Platte gerichtet.

c. Ferromagnetische Kugel

   i. Die Magnetisierung sei radial gerichtet.