

Serie 2

1. Brechung

Ein Teilchen der Masse m habe im Halbraum $z < 0$ die konstante potenzielle Energie U_1 , und im Halbraum $z \geq 0$ die unterschiedliche konstante potenzielle Energie U_2 . Es bewege sich nun mit der Geschwindigkeit \vec{v}_1 aus dem Halbraum $z < 0$ auf die x - y -Ebene zu.

Bestimmen Sie die Änderung der Bewegungsrichtung des Teilchens als Funktion des Einfallswinkels θ_1 .

Tipp: Man betrachte die Symmetrie des Problems, und berücksichtige entsprechend die Impuls- und Energie-Erhaltung. Gilt die Impulserhaltung in alle Richtungen?

2. Über Tischkante herabrutschendes Seil

Ein Seil der Länge l und der Masse ρ pro Längeneinheit rutsche ohne Reibung über eine Tischkante herab.

Lösen Sie die Bewegungsgleichung (Euler-Lagrange-Gleichung) für die Anfangsbedingungen

$$x(0) = a \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = 0 \quad ,$$

wobei $a < l$ und x die Länge des herabhängenden Seilstücks bezeichne.

Tipp: Die potenzielle Energie des herabhängenden Seilstücks berechnet sich über eine Integration. Man überlege sich dazu den Zusammenhang von Gewichtskraft und potenzieller Energie.

Hausaufgaben

3. Perle auf rotierendem Draht

Eine Perle der Masse m bewege sich reibungslos auf einem geraden horizontalen Draht, der mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale z -Achse rotiere.

Lösen Sie die Bewegungsgleichung (Euler-Lagrange-Gleichung) für die Anfangsbedingungen

$$r(t=0) = r_0 \quad \text{und} \quad \dot{r}(t=0) = 0 \quad ,$$

wobei r den Abstand von der Drehachse bezeichne.

Tipp: Überlegen Sie sich, in welchem Koordinatensystem sich dieses Problem am einfachsten lösen lässt, und stellen Sie anschliessend die Lagrangefunktion auf.

4. Symmetrien

Bestimmen Sie diejenigen Komponenten des Impulses \vec{p} und des Drehimpulses \vec{L} , die bei der Bewegung in Gravitationsfeldern folgender Geometrien erhalten bleiben.

- a. Feld einer unendlichen homogenen Ebene
- b. Feld eines unendlichen homogenen Kreiszyinders
- c. Feld von zwei Punkten
- d. Feld einer unendlichen homogenen Halbebene
- e. Feld eines homogenen Kegels
- f. Feld eines homogenen Kreisrings
- g. Feld einer unendlichen homogenen Schraubenlinie

Tipp: Überlegen Sie sich, gegenüber welchen Translationen und Rotationen die entsprechende Lagrangefunktion invariant ist.

5. Skaleninvarianz

- a. Wie verhalten sich die Laufzeiten von Punkten mit verschiedenen Massen längs gleicher Bahnen bei gleicher potenzieller Energie?
- b. Wie ändern sich die Laufzeiten längs gleicher Bahnen bei Änderung der potenziellen Energie um einen konstanten Faktor?