Prof. Dr. Danilo Pescia
Tel. 01 633 21 50
pescia@solid.phys.ethz.ch

PHYSIK II, SS 2004

Oliver Portmann
Tel. 01 633 20 77
portmann@solid.phys.ethz.ch

Serie 1

1. Variationsrechnung

Man bestimme die kürzeste Strecke zwischen zwei Punkten in der x-y-Ebene.

a. Als Ansatz betrachte man, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, die Punkte mit den Koordinaten $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ und verbinde sie mit den Strecken

$$y = a(x + 1), \quad x \in [-1, 0]$$

und

$$y = a(1 - x), \quad x \in [0, 1] \quad .$$

Bestimmen Sie den Variationsparameter a so, dass die Länge der Strecke minimal wird.

b. Stellen Sie die Euler'sche Gleichung des Problems auf, und zeigen Sie, dass eine Gerade die Lösung ist.
Tipp: Zeigen Sie, dass die Länge l einer Kurve $y(x)$ zwischen zwei Punkten $(x_0, y(x_0))$ und $(x_1, y(x_1))$ gegeben ist durch

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx \quad .$$

2. Pendel

Ein Pendel bestehe aus einer Masse m, die über einen (masselosen) Faden an einem festen Punkt P aufgehängt sei. Der Abstand zwischen m und P sei fest, und auf die Masse m wirke die Schwerkraft.

a. Bestimmen Sie die Lagrangefunktion.
Tipp: Man verwende Polarkoordinaten mit P als Ursprung.

b. Bestimmen Sie die Euler'schen Gleichungen.

c. Lösen Sie den Fall kleiner Auslenkungen aus der Ruhelage.

Hausaufgaben

3. Drehimpuls in Polarkoordinaten

Die Bewegung eines Teilchens erfolge in der x-y-Ebene.
Man bestimme den Ausdruck für die z-Komponente des Drehimpulses in Kugelkoordinaten.

Tipp:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = ?$$

4. Teilchen in einem zentralsymmetrischen Potenzial

Bestimmen Sie die Lagrangefunktion und die Lagrangegleichungen eines Teilchens in einem zentralsymmetrischen Potenzial. Die Bewegung sei auf die x-y-Ebene beschränkt.
Tipp: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

5. Pendel mit horizontal schwingendem Aufhängepunkt

Eine Masse m sei über einen (masselosen) Draht der Länge l an einem beweglichen Aufhängepunkt P befestigt. Der Aufhängepunkt P mache entlang der horizontalen x-Achse eine harmonische Schwingung:

$$x_P(t) = A\sin(\Omega t)$$

Man nehme an, dass sich der Massenpunkt nur in der x-z-Ebene bewege, wobei die z-Achse die vertikale Achse sei.

a. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.

b. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Ausschläge und die Anfangsbedingung

$$\varphi(t=0) = \dot{\varphi}(t=0) = 0 \quad ,$$

wobei φ den Winkel zwischen dem Draht und der Vertikalen beschreibt.