

Serie 4

1. Eine Masse m bewegt sich in einem homogenen Kraftfeld $\vec{K} = (0, 0, -mg)$.
 - a. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung (BG).
 - b. Zwei Massepunkte mit den gleichen Massen starten von der gleichen Höhe z_0 , die eine mit der Anfangsgeschwindigkeit 0, die andere mit $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$. Nach welcher Zeit erreichen sie $z = 0$? Berechnen Sie die Trajektorien $z(x, y)$ für beide Massen.
 - c. Zwei Massepunkte m_1, m_2 befinden sich auf den Höhen h_1, h_2 ($h_2 > h_1$) über der Erdoberfläche. Sie verlassen ihren Ort mit den Geschwindigkeiten v_1, v_2 in senkrechter Richtung zur Erdoberfläche.
Nach welcher Zeit erreichen die Massen die Erdoberfläche?
Welche maximale Höhe erreichen sie, wenn die Anfangsgeschwindigkeit nach oben gerichtet ist?
Nach welcher Zeit erreicht m_2 die andere Masse, wenn am Anfang $v_1 = 0$ und $v_2 = -v$ ist?

2.

Für ein Vektorfeld \vec{K} definiert man den Begriff des Linienintegrals (Arbeit W von \vec{K} genannt) entlang des Weges C wie

$$W := \int_C \vec{K} \cdot d\vec{r} \doteq \int_{t_0}^{t_1} \vec{K}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt,$$

wobei der Weg C durch die Raumkurve $\vec{r}(t)$ zwischen $t = t_0$ und $t = t_1$ parametrisiert wird.

- a. Berechnen Sie die Arbeit von $\vec{K} = (0, 0, -mg)$ entlang der in Aufg. 1b) und 1c) gefundenen Raumkurven.
- b. Zeigen Sie, dass sich das Gravitations-Kraftfeld der Masse m als Gradient einer potentiellen Energie schreiben lässt.
- c. Beweisen Sie für $\vec{K} = \vec{\nabla}\phi$ (\vec{K} nennt man ein konservatives Feld)

$$\int_C \vec{K} \cdot d\vec{r} = \phi(P_1) - \phi(P_2),$$

wobei P_1 und P_2 die Anfangspunkte des Weges sind.

d. Beweisen Sie

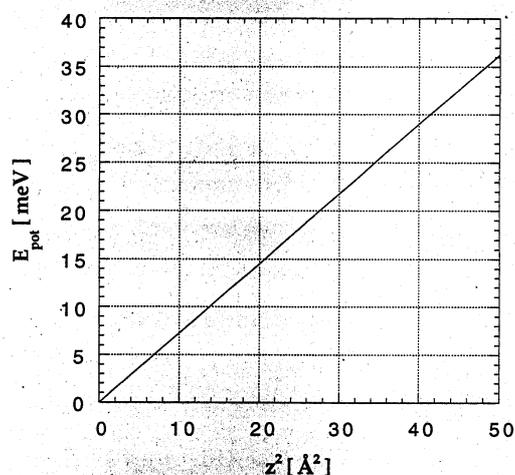
$$\oint \vec{K} \cdot d\vec{r} = 0,$$

wobei \oint das Linienintegral über einen in sich geschlossenen Weg darstellt.

3.

Ein Massenpunkt mit der Masse $m = 2.325 \cdot 10^{-26}$ kg bewegt sich entlang der z -Achse. Die potentielle Energie des Massenpunktes konnte durch folgenden Graph dargestellt werden:

- Wie lauten die BG dieses Massenpunktes?
- Der Massenpunkt befindet sich zur Zeit $t = 0$ am Ort $z = 2 \text{ \AA}$ und hat die Geschwindigkeit 0. Wo befindet sich das Teilchen zur Zeit $t = 2\pi \cdot 10^{-12}$ s?
- Der Massenpunkt befindet sich zur Zeit $t = 0$ am Ort $z = 2 \text{ \AA}$ und hat eine Geschwindigkeit von 350 m/s. Welche ist die grösste Koordinate z , die er erreichen kann?



4.

Gegeben sei eine Masse m , welche die potentielle Energie $V = -A \cdot \cos(\frac{z}{\lambda})$ besitzt.

- Wie lauten die BG für (x, y, z) ?
- Wie vereinfacht sich die BG für z , wenn $z \ll \lambda$ ist?
- Sei m zur Zeit $t = 0$ am Ort $(0, 0, z_0 \ll \lambda)$ mit der Geschwindigkeit 0. Nach welcher Zeit kehrt sie zur Startposition zurück?