Prof. Dr. Danilo Pescia
Tel. 633 21 50
pescia@solid.phys.ethz.ch

Thomas Michlmayr
Tel. 633 23 28
michlmayr@phys.ethz.ch

Serie 3

1. Regel von de l'Hospital

a. Gegeben: $f(x)$ und $g(x)$ mit $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$. Zeigen Sie, falls $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, dann gilt $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

b. Zeigen Sie, dass dies auch im Fall $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$ gilt. Berechne nun:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{|x-2|}}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1}$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} -x \ln x$

(v) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\frac{1}{x})^x$

2. Beweisen Sie!

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ stetig differenzierbar in $]a,b[$, und ist $f'(x) = 0 \ \forall x$, so ist f konstant.

3. * Berechnen Sie die die Taylorreihe bis $n = 3$ für folgende Funktionen:

a. $f(x) = \ln(1+x), \quad x \in]-1,1[\quad$ um $x_0 = 0$

b. $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

c. $f(x) = (1+x)^\alpha \quad$ um $x_0 = 0$

d. $f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} e^{-\frac{1}{x^2}} & , & x \neq 0 \\ 0 & , & x = 0 \end{array} \right\}$ um $x_0 = 0$

4. Beweisen Sie folgende Grundregeln durch Differention der rechten Seite.

(Alle Stammfunktionen bis auf eine additive Konstante!)

a. $\int x^{alpha} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{1+\alpha} x^{1+\alpha}$

b. $\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln(x)$

c. $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x$

d. $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x$

e. $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x$

5. Finden Sie die Stammfunktion durch partielle Integration.

a. $\int \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x$

b. $\int \sqrt{1+x^2} \, \mathrm{d}x$

c. $\int \sqrt{x^2-1} \, \mathrm{d}x$

d. $\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x$

e. $\int x \ln x \, \mathrm{d}x$

f. $\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x$

g. $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$

h. $\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x$

*Diese Aufgaben sind anspruchsvoller und deshalb freiwillig zu lösen

Physik I für Studiengänge Physik & Mathematik & Rechnergestützte Wissenschaften
Wintersemester 2003/04

Prof. Dr. Danilo Pescia
Tel. 633 21 50
pescia@solid.phys.ethz.ch

Thomas Michlmayr
Tel. 633 23 28
michlmayr@phys.ethz.ch

6. Benutzen Sie die Substitution um die folgenden Integrale zu lösen.

a. Zeigen Sie, dass das Integral translationsinvariant ist, d.h. dass

$$\int_a^b f(x+c)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b. Beweisen Sie die Skalierungsregel

$$\int_a^b f(vx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{v}\int_{av}^{bv} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

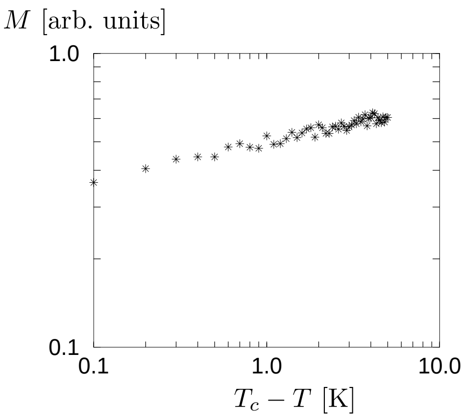
c. $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

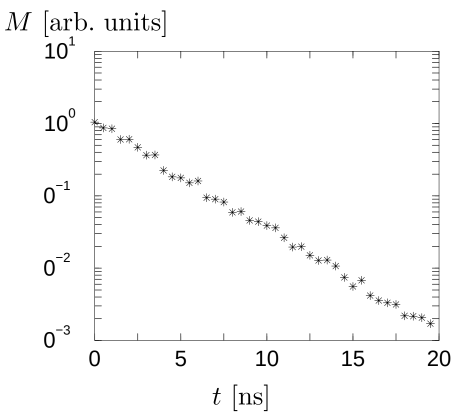
d. $\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$

e. $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

7. Interpretation einer Messung

Bei der Messung der Magnetisierung M in Abhängigkeit von der Temperatur und der Zeit wurden folgende Daten gemessen:





a. Welcher Zusammenhang (bis auf eine Proportionalitätskonstante) besteht zwischen M und T?

b. Welcher Zusammenhang (bis auf eine Proportionalitätskonstante) besteht zwischen M und t?

8. * Beweisen Sie,

dass die Exponentialfunktion die einzige Funktion ist (bis auf eine multiplikative Konstante) mit der Eigenschaft $f' = f$. Tip: Nehmen Sie an, dass es eine andere Funktion g mit der Eigenschaft $g' = g$ gibt. Betrachte dann $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}$.

9. Was ist falsch mit der folgenden Anwendung der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1}\frac{6x}{2} = 3$$

Die richtige Antwort ist -4.

10. Was ist der Wert der folgenden Integrale. Tip: Sind die Integranden gerade oder ungerade Funktionen?

a. $\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

b. $\int_{-1}^{1}(x^5+3)\cdot(1-x^2)\,\mathrm{d}x$

11. * Die Eulersche Γ-Funktion

Zeigen Sie, dass die Γ-Funktion $\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ die Funktion der Fakultät interpoliert im Sinne, dass $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

a. Zeige mit Hilfe der partiellen Integration, dass $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$

b. Zeige, dass $\Gamma(1) = 1$ und dann mit Induktion, dass $\Gamma(n+1) = n\cdot\Gamma(n)$

12. * Beweisen Sie die Bernouilli-Ungleichung:

$$(1+x)^n > 1+nx \qquad \forall x > 0, \quad n \in \mathbf{N}$$

Tip: Merke, dass die Ungleichung Für $x = 0$ zu einer Gleichung wird. Leite dann beide Seiten ab!

Prof. Dr. Danilo Pescia
Tel. 633 21 50
pescia@solid.phys.ethz.ch

Thomas Michlmayr
Tel. 633 23 28
michlmayr@phys.ethz.ch

13. Der Mittelwert für periodische Funktionen $f \in \mathcal{C}^{\mathrm{per}}([0,T])$ auf dem Interval $[0,T]$ ist definiert als

$$< f > := \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \,\mathrm{d}x$$

Berechne $< f >$ für

a. $f(x) = \sin(x)$

b. $f(x) = \cos(2 \cdot x)$

c. $f(x) = \sin^2(x)$

d. $f(x) = \cos^2(x)$

14. * Sei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Zeige:

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$