Serien 13

1. (a) Seien $f, g \in \mathcal{S}$. Zeigen Sie, dass $f \cdot g \in \mathcal{S}$ und $f * g \in \mathcal{S}$.

   (b) Sei $\mathcal{S} - \lim_{n\to\infty} f_n = f$ und $\mathcal{S} - \lim_{n\to\infty} g_n = g$. Zeigen Sie:

$$\mathcal{S} - \lim_{n\to\infty} f_n \cdot g_n = f \cdot g, \quad \text{und} \quad \mathcal{S} - \lim_{n\to\infty} f_n * g_n = f * g.$$

   (c) Sie $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $g(x) = e^{-x^2}$. Zeigen Sie: $f * g \notin \mathcal{S}$.

2. Berechnen Sie die Fouriertransformierten im Sinne der Distributionen der folgenden Distributionen:

   (a) $f(x) = e^{iax}$

   (b) $f(x) = x$

3. Es bezeichne $P(\frac{1}{x})$ den Hauptwert von $\frac{1}{x}$. Zeigen Sie:

   (a) $x \cdot P(\frac{1}{x}) = 1$

   (b) $(\log|x|)' = P(\frac{1}{x})$

   (c) $\left(P(\frac{1}{x})\right)'[\phi] = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{2\phi(0)}{\epsilon} - \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{x^2}\phi(x)dx\right)\right]$

   (alles im Sinne der Distributionen)

   Bemerkung: $\frac{1}{x^2}$ ist nicht lokal integrierbar und daher „keine Distribution“. $\left(P(\frac{1}{x})\right)'$ kann als „$\frac{1}{x^2}$ regularisiert“interpretiert werden. Die Regularisierung besteht-schematisch-aus Substraktion von $\infty \cdot \delta$- oder vielleicht von $2 \cdot \infty \cdot \delta$! Analoge Regularisierungen von Distributionen spielen eine grosse Rolle in der Quantenfeldtheorie.

Ferien Serie!!!