Serien 12

1. Zeigen Sie:
$$\Delta_S = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$
ist hermitisch un negativ semidefiniert auf $C^2(S^2)$ versehen mit:
$$\langle u, v\rangle = \int d\Omega \quad u\cdot\bar{v} = \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta d\phi \quad u(\theta,\phi)\bar{v}(\theta,\phi).$$

2. Es bezeichne:
$$R_{l,m}(x) = \frac{d^m}{dx^m}P_l(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots, l.$$
Die Legendre Differentialgleichung kann in die Form
$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_l(x) - 2x\frac{d}{dx}P_l(x) + l(l+1)P_l(x) = 0$$
umgeschrieben werden.

(a) Durch m-malige Differentiation dieser Gleichung zeigen Sie,
$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}R_{l,m}(x) - 2(m+1)x\frac{d}{dx}R_{l,m}(x) + (l(l+1) - m(m+1))R_{l,m}(x) = 0.$$

(b) Es bezeichne $P_{l,m}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}R_{l,m}(x)$. Zeigen Sie:
$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}P_{l,m}(x) + (l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2})P_{l,m}(x) = 0.$$

Bemerkung: Daraus folgt, dass $P_{l,m}(\cos\theta)e^{\pm im\phi}$ eine Eigenfunktion von Δ_S zum Eigenwert $l(l+1)$ ist.

3. Ziel dieser Aufgabe ist der Beweis von:

Proposition. Für $-1 \le x \le 1$ und $|u| < 1$ gilt
$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^\infty P_n(x)u^n.$$

Einleitung: Es bezeichne $\sqrt{}$ den Hauptzweig (principal branch) der Quadratwurzel. Diese Funktion ist-insbesondere-analytisch und $\neq 0$ auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. Daher ist $\frac{1}{\sqrt{1-\omega}}$ analytisch auf der Einheitskreisscheibe. Sei
$$\frac{1}{\sqrt{1-\omega}} = \sum_{j=0}^\infty q_j\omega^j$$

die entsprechende Taylorreihe (Binomialreihe). Diese Reihe hat Konvergenzradius $= 1$. Es bezeichne nun

$$g(u,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2ux+u^2}}.$$

Ist $2|u| + |u|^2 < 1$, so ist

$$g(x,u) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j (2xu - u^2)^j$$

für $-1 \leq x \leq 1$. Ferner konvergiert die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} |q_j| (2|xu| + |u|^2)^j.$$

Nach dem Umordnungssatz können wir die Reihe für $g(u,x)$ in die Form

$$g(x,u) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) u^n \qquad (*)$$

umschreiben; diese Darstellung gilt für $-1 \leq x \leq 1$, $2|u| + |u|^2 < 1$.

(a) Zeigen Sie: $Q_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad $\leq n$.

(b) Verifizieren Sie-entweder von Hand oder mit Maple oder Mathematica- dass gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x}(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x} g(x,u) = -u\frac{\partial^2}{\partial u^2} u \cdot g(x,u).$$

(c) Durch gliedweise Diffenrentiation von $(*)$, zeigen Sie:

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} Q_n(x) = -n(n+1) Q_n(x), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

(Rechfertigung der gliedweise Differentiation wird nicht verlangt.)

(d) Zeigen Sie, dass $Q_n(1) = 1$.

Aus (c) und (d) folgt, dass $Q_n(x) = P_n(x)$ (Legendre Polynom). Daher gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n, \quad (**)$$

für $2|u| + |u|^2 < 1$, $-1 \leq x \leq 1$.

(e) Zeigen Sie: Für $-1 \leq x \leq 1$ und $|u| < 1$ ist $1 - 2xu + u^2 \notin (-\infty, 0]$. Daher ist $u \mapsto g(x,u)$ analytisch für $|u| < 1$.

(f) Daraus schliessen: $(**)$ gilt für alle u mit $|u| < 1$.

4. (Multipolenentwicklung des Coulomb-Potentials). Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ mit $0 < |x| < |y|$. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{|x-y|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{|y|^{n+1}} P_n(\cos\theta), \quad \cos\theta := \frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|}.$$

Abgabe: in den Übungen vom 1. Februar 2005