Serien 11

1. Finden Sie Lösungen der 1-dimensional Wärmeleitungsgleichung mit:

   (a) $u_0(x) = e^{-x^2}$

   (b) $u_0(x) = e^{3x}$

   (c) $u_0(x) = \sin(x)$.

2. Es bezeichne:

$$K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

   a) Zeigen Sie, durch direkte Rechnung, dass $K_t(x)$ die Wärmeleitungsgleichung erfüllt für $t > 0$.

   b)Zeigen Sie analog, dass

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi(\tau - t)}} e^{+\frac{x^2}{4(\tau - t)}}$$

   die Wärmeleitungsgleichung erfüllt für $0 < t < \tau$. (Bem: Im Gegensatz zu den „guten "Lösungen ist diese Funktion sehr schnell wachsend mit $x \to \infty$.)

   c) Zeigen Sie:

$$K_t * K_s = K_{t+s}, \quad t, s > 0.$$

3. Wir schreiben hier $< u, v >$ für $\int_0^L u(x)\bar{v}(x)dx$ (gewöhnliches Skalarprodukt auf $L^2([0, L])$ und Δ für $\frac{d^2}{dx^2}$, aufgefasst als operator auf $C^2([0, L])$.

   a) Seien $u, v \in C^2([0, L])$ mit $u(0) = u'(L)$, $v(0) = v'(L) = 0$. („gemischte Randbedingungen"). Zeigen Sie:

   (i) $< \Delta u, v >=< u, \Delta v >$

   (ii) $< \Delta u, u >\leq 0$, < 0 wenn $u \neq 0$.

   b) Finden Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von Δ auf $[0, L]$ mit Randbedingungen $u(0) = u'(L) = 0$.

   c) Zeigen Sie: Die normierte Eigenfunktionen bilden eine vollständige orthonormale Familie in $L^2([0, 2])$.

4. (Legendre Polynome.) Das n^{te} Legendre Polynom $P_n(x)$ ist definiert als:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

   Zeigen Sie:

   a) $P_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad n. Berechnen Sie den Koeffizienten von x^n in $P_n(x)$.

b)Ist $m < n$, so ist $< x^m, P_n(x) >= 0$, wobei

$$< u, v >:= \int_{-1}^{1} u(x)\bar{v}(x)dx.$$

Bemerkung: Es folgt sofort daraus, dass die P_n eine orthogonale Familie bilden $< P_m, P_n >= 0$ für $m \neq n$.

c) $< P_n, P_m >= \frac{2}{2n+1}$

d) $P_n(1) = 1$

Hinweis: Ist $j < n$, so verschwindet $\frac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^n$ in ± 1.

Abgabe: in den Übungen vom 25. January 2005