Serien 10

1. In der Vorlesung ist gezeigt worden, dass

$$\int_{S^{d-1}} e^{ik\cdot\hat{x}} d\Omega_d(\hat{x}) = G_d(|k|),$$

wobei G_d erfüllt:

$$G_d''(x) + \frac{d-1}{x} G_d'(x) + G_d(x) = 0; \quad G_d(0) = |S^{d-1}| = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

Mit Maple oder Mathematica, lösen Sie diese Anfangswertaufgabe für $d = 2, 3, 4, 5$ und verifizieren Sie, dass die erhaltene Lösungen mit der allgemeinen Formel:

$$G_d(x) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} x^{1-\frac{d}{2}} J_{\frac{d}{2}-1}(x)$$

übereinstimmen. Können Sie auch diese allgemeine Formel mit Maple/Mathematica herleiten?

2. (Laplace-Operator in Polarkoordinaten): Sei $u(x_1, x_2)$ eine C^2-Funktion definiert auf einem offenen Gebiet in $\mathbb{R}^2$, und setze

$$\tilde{u}(r, \phi) := u(r\cos\phi, r\sin\phi),$$

(„u in Polarkoordinaten").

Zeigen Sie:

(a)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_1}(r\cos\phi, r\sin\phi) &= \cos\phi\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \sin\phi \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \phi} \\
\frac{\partial u}{\partial x_2}(r\cos\phi, r\sin\phi) &= \sin\phi\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \cos\phi \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \phi}
\end{aligned}$$

(b)

$$\Delta u(r\cos\phi, r\sin\phi) = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \phi^2}$$

Bemerkung: Man sagt daher „Der 2-dimensionale Laplace-Operator lautet:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

im Polarkoordinaten ".

Aufgrund dieser Rechnung sollte es klar sein, wie man eine entsprechende Formel für den 3-dimensionalen Laplace-Operator im Kugelkoordinaten herleiten kann. Die Rechnungen sind aber lang und nicht besonders aufschlussreich. Interessanter ist die folgende **Challenge:** Leiten Sie deise Formel her mit allen komplizierten Rechnungen gemacht durch Maple oder Mathematica.

3. Seien $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $u(t,x)$ die Lösung der 3-dimensionalen Wellengleichung mit

$$u(0,x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x).$$

Zeigen Sie:

$$\lim_{t\to\infty} t \cdot u(t, x_1 + ct, x_2, x_3) = h(x_1)$$

wobei

$$h(x_1) = \frac{1}{4\pi c^2} \int dx_2 dx_3 \left(-c \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) + g(x_1, x_2, x_3) \right).$$

Interpretation: If we observe the wave $u(t,x)$ in a coordinate system moving with velocity c (and direction of motion taken along the positive x_1-axis, for definiteness) then the observed disturbance drops off like $\frac{1}{t}$ for large t. If we further correct for this drop-off by multiplying by t, then the rescaled disturbance approaches a limit depending only on x_1, with profile $h(x_1)$.

Abgabe: in den Übungen vom 18. January 2005