Serien 8 und 9

1. Die *Gammafunktion* ist definiert für $\Re\{z\} > 0$ als:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

(uneigentliches Riemann-Integral).

Zeigen Sie:

a) Das Integral konvergiert absolut (für $\Re\{z\} > 0$)

b)(Fakultativ): $\Gamma(z)$ ist analytisch in $\{z : \Re\{z\} > 0\}$.

(Eine Möglichkeit: Verifizieren der Cauchy–Riemannnschen Gleichungen durch Vertauschen von Integral und Differentiation).

c) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$; $\quad \Gamma(1) = 1$; $\quad \Gamma(m) = (m-1)!$ für $m = 2, 3, \ldots$

d) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Für $\Re\{z\} < 0$, $z \notin \{0, -1, -2, \ldots\}$ definiert man $\Gamma(z)$ als

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{z+1}\cdots\frac{1}{z+j-1}\Gamma(z+j),$$

mit j gross genug, so dass $\Re\{z+j\} > 0$.

e) Diese Definition is unabhängig von der Wahl von j solange $\Re\{z+j\} > 0$. Die erweiterte $\Gamma(z)$ erfüllt $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ auf $\mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, \ldots\}$

f)(Fakultativ) Die erweiterte $\Gamma(z)$ ist analytisch in $\mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, \ldots\}$.

g)Für $d = 2k+1$, $k = 1, 2, \ldots$ gilt:

$$\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} = \frac{2^{2k+1}\pi^k k!}{(2k)!}.$$

Zur Erinnerung:

$$|S^{d-1}| = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

2. Der allgemeine Punkt $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ lässt sich in Kugelkoordinaten $(r, \phi, \theta_3, \dots, \theta_d)$ ausdrücken als:

$$\begin{aligned}
x_d &= r\cos\theta_d \\
x_{d-1} &= r\sin\theta_d\cos\theta_{d-1} \\
x_{d-2} &= r\sin\theta_d\sin\theta_{d-1}\cos\theta_{d-2} \\
\dots & \\
x_3 &= r\sin\theta_d\dots\sin\theta_4\cos\theta_3 \\
x_2 &= r\sin\theta_d\dots\sin\theta_3\sin\phi \\
x_1 &= r\sin\theta_d\dots\sin\theta_3\cos\phi.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$\det\frac{\partial(x_1, \dots, x_d)}{\partial(r, \phi, \theta_3, \dots, \theta_d)} = (-1)^d \quad r^{d-1}(\sin\theta_d)^{d-2}\dots(\sin\theta_3)$$

Hinweis: Induktion nach d.

3. (Fakultativ) Beweisen Sie:

Proposition 3.15: Sei $K \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\int K dz = 1$. Es bezeichne

$$K_\eta(z) = \frac{1}{\eta^d}K(\frac{z}{\eta}), \quad (\eta > 0),$$

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann konvergiert $K_\eta \star f$ gegen f in L^1 wenn $\eta \to 0^+$.

Hinweise: Dies ist in der Vorlesung bewiesen worden für $K, f \in C_0$. Der Beweis im allgemeinen Fall ist ein $\frac{\epsilon}{3}$-Argument: Man approximiert K, f genügend gut in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit Elementen aus C_0 (Prop. 2.15); dann verwendet systematisch die Abschätzung

$$\|u \star v\|_1 \leq \|u\|_1 \cdot \|v\|_1.$$

4. (Besselfunktionen). Sei $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{-1, -2, \dots\}$. Zeigen Sie:

a) Die Potenzreihe

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\Gamma(\alpha+1+j)}(\frac{z}{2})^{2j}$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ und definiert somit eine ganze analytische Funktion. Die *Besselfunktion der Ordnung* α ist definiert als:

$$J_\alpha(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\Gamma(\alpha+1+j)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\Gamma(\alpha+1+j)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+2j}.$$

b) J_α erfüllt:

$$J''_\alpha + \frac{1}{z}J'_\alpha + (1 - \frac{\alpha^2}{z^2})J_\alpha = 0, \quad (B),$$

(Besselsche Differentialgleichung).

c)Für $\alpha \notin \mathbb{Z}$: J_α und $J_{-\alpha}$ bilden eine Basis für den (2-dimensionalen) Vektorraum der Lösungen von (B).

d) Es gilt:

$$\begin{aligned} J_{\alpha-1}(z) + J_{\alpha+1}(z) &= \frac{2\alpha}{z}J_\alpha(z), \\ J_{\alpha-1}(z) - J_{\alpha+1}(z) &= 2J'_\alpha(z) \\ J_{\alpha+1}(z) &= \frac{\alpha}{z}J_\alpha(z) - J'_\alpha(z). \end{aligned}$$

e)$J_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin z$

Finden Sie eine analoge elementare Formel für $J_{\frac{3}{2}}(z)$ (Bem: Alle $J_{n+\frac{1}{2}}(z)$ können mit $\sin(z)$ und $\cos(z)$ ausgedrückt werden. Andere Besselfunktionen sind „nicht elementar “.)

5. Die eindimensionale Wellengleichung lautet:

$$(WG): \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Zeigen Sie:

a) Ist $v \in C^2(\mathbb{R})$, so sind $u(t,x) = v(x+ct)$ und $u(t,x) = v(x-ct)$ Lösungen von (WG).

b)Seien $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Es existiert dann eine eindeutige Funktion u der Form:

$$u(t,x) = v_+(x+ct) + v_-(x-ct), \quad v_+, v_- \in C^2$$

(daher: eine Lösung von (WG)) welche die Anfangsbedingungen:

$$u(0,x) = f, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g$$

erfüllt.

c) Sind $\mathrm{supp}(f)$ and $\mathrm{supp}(g)$ beide in $[a,b]$ enthalten, dann ist $\mathrm{supp}(x \mapsto u(t,x))$ in $([a-ct, b+ct]$ enthalten.

Abgabe: in den Übungen vom 11. Januar 2005