Serien 7

Zur Erinnerung: Für Funktionen auf $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}f)(k) &:= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \int e^{-ikx} f(x)dx \\ (\mathcal{F}^* g)(x) &:= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \int e^{+ikx} g(k)dk.\end{aligned}$$

1. Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie:
   a) $(\mathcal{F}f_a)(k) = e^{-ika}(\mathcal{F}f)(k)$, wobei $f_a(x) = f(x-a)$, $a \in \mathbb{R}^d$.
   b) $(\mathcal{F}f^{(\lambda)})(k) = \frac{1}{|\lambda|^d}(\mathcal{F}f)(\frac{k}{\lambda})$, wobei $f^{(\lambda)}(x) = f(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
   c) $\mathcal{F}(f \star g)(k) = (2\pi)^{\frac{d}{2}}\, \mathcal{F}f(k) \cdot \mathcal{F}g(k)$.
   d) $\int dk \mathcal{F}f(k)\bar{g}(k) = \int dx f(x)\overline{\mathcal{F}^* g}(x)$ (Formal: $\langle \mathcal{F}f, g\rangle = \langle f, \mathcal{F}^* g\rangle$).

2. Bestimmen Sie:
   a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} (1-\sin x)^n dx$
   b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx$
   c) Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^{\alpha-1} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx,$$

   für $\alpha > 0$.

   Hinweis: Verifizieren Sie zunächst, dass

$$(1-\frac{x}{n})^n \leq e^{-x},$$

   für $0 \leq x \leq n$.

3. Ziel dieser Übung ist der Beweis von:
   Proposition: Seien $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Dann
   i) $(u \star f)(x) = \int u(x-y)f(y)dy$ ist definiert für fast alle x
   ii) $u \star f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\|u\star f\|_2 \leq \|u\|_1^2 \cdot \|f\|_2$.
   Zum Beginn machen wir die formale Rechnung:

$$\begin{aligned}\int |u\star f(x)|^2 dx &= \int dx \left(\int dy \quad u(x-y)f(y)\right)\left(\overline{\int dz \quad u(x-z)f(z)}\right) \\ &= \int dxdydz \quad u(x-y)\bar{u}(x-z)f(y)\bar{f}(z).\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Proposition folgt aus der Ungleichung:

$$\int dxdydz \quad |u(x-y)\bar{u}(x-z)f(y)\bar{f}(z)| \leq \|u\|_1^2 \cdot \|f\|_2 (< \infty), \quad (*)$$

b) Um $(*)$ zu beweisen, verwenden Sie die elementare Ungleichung

$$|f(y)\bar{f}(z)| \leq \frac{1}{2}(|f(y)|^2 + |f(z)|^2).$$

Dann zeigen Sie , z.B.,

$$\int dxdydz \quad |u(x-y)| \cdot |\bar{u}(x-z)| \cdot |f(y)|^2 = \|u\|_1^2 \cdot \|f\|_2^2.$$

Abgabe: in den Übungen vom 14. Dezember 2005