Serie 6

1. Zeigen Sie: Die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ ist über $[0,\infty)$ nicht Lebesgue integriebar (obgleich das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx := \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx$$

bekanntlich existiert).

2. Sei f über $\mathbb{R}$ Lebesgue integrierbar. Es bezeichne

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad (:= \int_{(-\infty,x]} f dt).$$

Zeigen Sie: F ist stetig.

3. Sei f über $\mathbb{R}$ Lebesgue integrierbar; $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ eine steigende Folge messbarer Mengen mit $E := \bigcup_n E_n$.

Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f dx = \int_E f dx.$$

4. Sei $f_1, f_2, \dots$ eine Folge Lebesgue integrierbar Funktionen mit

$$\sum_n \int |f_n| dx < \infty.$$

Zeigen Sie:

a)$\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ konvergiert f.ü.

b)$\sum_{n=1}^\infty f_n$ ist Lebesgue integrierbar, mit:

$$\int \sum f_n dx = \sum_n \int f_n dx.$$

5. a) Sei $g(x) := \frac{1}{1+|x|}$. Zeigen Sie: $g \in L^2$ aber $g \notin L^1$.

b)Finden Sie ein Beispiel für eine Funktion h, die zu $L^1 \backslash L^2$ gehört.

c)Sei $f \in L^2$. Setze:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| > 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: $f_1 \in L^1$.

6. Berechnen Sie die Fouriertransformierten von:

   a) $f(x) = \chi_{[a,b]}$

   b) $f(x) = e^{-|x|}$.

Abgabe: in den Übungen vom 7. Dezember 2004