Serien 5

1. Die Tchebyscheff-Polynome $T_n(t)$ sind definiert rekursiv durch:

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t$$
$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \quad (n \leq 1).$$

Zeigen Sie,

(a) $T_n(t)$ ist gerade für n gerade; ungerade für n ungerade.

(b)$T_n(t) = 2^{n-1}t^n + \sum_{j=0}^{n-1} c_j^{(n)} t^j$ (d.h.: $T_n(t)$ hat Grad n; Hauptkoeffizient 2^{n-1}).

(c) Die $T_n(t)$ sind zueinander orthogonal bezüglich des Skalarproduktes:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

(Skalarprodukutes mit Gewicht $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$).

2. Zeigen Sie: Ist f messbar, dann ist $\{x : f(x) = \infty\}$ messbar.

3. Zeigen Sie: Wenn $\{x : f(x) \leq a\}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ messbar ist, dann ist f messbar.

4. Sei f messbar, und sei g eine andere Funktion mit $f(x) = g(x)$ f.ü. (d.h. $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ ist eine Nullmenge). Zeigen Sie: g ist auch messbar.

5. Sie (f_n) eine Folge messbarer Funktionen. Zeigen Sie:

(a) $\inf_n f_n$ ist messbar,

(b) $\liminf_n f_n$ ist messbar.

6. Sei f messbar und nichtnegativ. Zeigen Sie:

$$\int f dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \quad \text{f.ü.}$$

f.ü. (fast Überall) bedeutet, dass $\{x : f(x) \neq 0\}$ eine Nullmenge ist.

7. Sei f messbar un nichtnegativ, und sei $\int f dx < \infty$. Zeigen Sie: $\{x : f(x) = \infty\}$ ist eine Nullmenge.

Abgabe: in den Übungen vom 30. November 2005