Serie 4

1. Sei $(\mathbf{e}_j)$ eine vollständige orthonormale Familie in einem Prähilbertraum H, und seien f, g Elemente von H mit entsprechenden Reihendarstellungen,

$$f = \sum_j c_j \mathbf{e}_j, \qquad bzw. \qquad g = \sum_j d_j \mathbf{e}_j.$$

Zeigen Sie,

(a) $\sum_j c_j \bar{d}_j$ konvergiert absolut,

(b) $\langle f, g \rangle = \sum_j c_j \bar{d}_j$.

2. Zeigen Sie:

$$\sin(x) \geq \frac{2}{\pi} x, \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

3. (Weiterentwicklung der Proposition 1.21)

(a) Sei $K(x)$ eine nichtnegative stetige 2π-periodische Funktion, und seien (k_n) die entsprechende Fourierkoeffizienten. Zeigen Sie:

$$|k_n| \leq k_0,$$

für alle n.

(b) Nun sei $(K^{(m)})$ eine Folge derartiger Funktionen, mit

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K^{(m)}(y) dy = 1,$$

für alle m.

Zeigen Sie, dass die folgende äquivalent sind:

i) $\lim_{m\to\infty} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) K^{(m)}(y) dy = 0$ für alle $\delta > 0$,

ii) $\lim_{m\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} y^2 K^{(m)}(y) dy = 0$,

iii) $\lim_{m\to\infty} k_n^{(m)} = 1$ für alle n.

Hinweise: *i)* $\Leftrightarrow$ *ii)* ist elementar. Für *ii)* $\Leftrightarrow$ *iii)*, benutzen Sie die Tatsache, dass

$$\sum_n |c_n| < \infty,$$

wobei (c_n) die Fourierkoeffizienten von x^2 auf $(-\pi, \pi)$ bezeichnen.

4. Sei $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Zeigen Sie, dass für jede endliche Überdeckung von A mit offenen Intervallen $I_1, \ldots, I_n$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} l(I_k) \geq 1.$$

5. Beweisen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalen sind.

a) $\lambda^*(E) = 0$

b)Es existiert eine Folge von Intervallen $I_1, I_2, \ldots$ mit

$$\sum_{k=1} l(I_k) < \infty,$$

so dass jedes $x \in E$ zu unendlich vielen I_k gehört.

Abgabe: in den Übungen vom 23. November 2004