Serie 3

1. Sei f R-integrierbar über $[0, l]$ und sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right),$$

die entsprechende Fourier Sinus-Reihe. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{l}\int_0^l |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2.$$

Finden Sie die analoge Formel für Cosinus-Reihen.

2. Sei f R-integrierbar, 2π-periodisch und stückweise stetig differenzierbar, mit Sprüngen an den stellen $x_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, und keine andere (d.h. ein Sprung pro Periode). Zeigen Sie:

$$|c_n(f)| = \frac{c}{|n|} + o(\frac{1}{n}),$$

wobei c eine Konstante ist. Welche Wert hat c?

3. Sei f R-integrierbar un 2π-periodisch; c_n die entsprechenden Fourierkoeffizienten. Zeigen Sie,

$$\int_0^x f(y)dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^x e^{iny} dy.$$

Dass heisst: Fourier-Reihen dürfen immer gliedweise integriert werden, auch wenn sie nicht überall punktweise konvergieren.

Hinweis: $\int_0^x f(y)dy$ lässt sich als Skalarprodukt schreiben.

4. In Übung 2 der Serie 1 haben Sie die Formel:

$$x^2 - \frac{\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx), \quad -\pi < x < \pi,$$

hergeleitet. Durch gliedweise Integration finden Sie eine explizite Formel für

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx).$$

Berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

(In analoger Weise hönnen alle Reihen der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

berechnet werden).

5. (Fakultativ)

   Der Fejer-Kern ist definiert als

$$F_n(z) := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} D_j(z).$$

   Zeigen Sie:

$$F_n(z) := \begin{cases} \frac{1}{n} \left(\frac{\sin(\frac{n}{2} z)}{\sin(\frac{z}{2})} \right)^2, & z \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n, & z \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

   (Der Beweis ist eine Rechnung und nicht besonders schwierig. Sie können ihn in z.B. den Notizen von Felder finden. Es lohnt sich aber, diese Rechnung für sich selbst auszuführen.)

6. (Fakultativ)

   Es bezeichne:

$$f_n(x) = (\cos(nx))^n, \quad \text{auf} \quad (0, \pi).$$

   (a) Zeigen Sie, dass

$$f_n \to 0, \quad \text{in} \quad L^2.$$

   (b) Zeigen Sie, dass $f_n(x)$ divergiert für jedes x der Form

$$x = \frac{p}{q}\pi, \qquad p, q \quad \text{ungerade}.$$

   (Solche Punkte liegen dicht in $(0, \pi)$).

   Bemerkung: Es wird nicht gefragt, die fakultativ Übungen abzugeben.

Abgabe: in den Übungen vom 9. November 2004