Serie 2

1. Sei $f(x)$ 2π-periodisch und Riemann–integrierbar, mit

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0 \qquad (*).$$

Es bezeichne

$$F(x) = \int_0^x f(y)dy.$$

(a)Zeigen Sie, dass $F(x)$ 2π-periodisch ist. Warum ist die Bedingung $(*)$ nötig?

(b)Drücken Sie die Fourier-Koeffizienten $c_n(F)$, $n \neq 0$, mit den $c_n(f)$ aus. Verwenden Sie partielle Integration.

(c) Zeigen Sie

$$c_0(F) = -\sum_{n\neq 0} \frac{c_n(f)}{in}.$$

Sie dürfen hier annehmen, dass die Fourier–Reihe von f gleichmässig gegen f konvergiert.

2. Finden Sie die Fourier cosinus–Reihe von $\sin(x)$ auf $[0,\pi]$. Es folgt aus der allgemeinen Theorie, dass diese Reihe gegen $\sin(x)$ konvergiert gleichmässig auf $[0,\pi]$ und in L^2. Berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

3. Es seien $f(x)$, $g(x)$ 2π-periodisch und Riemann–integrierbar. Das Faltungsprodukt von f und g, $f * g$, ist definiert durch

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)dy.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f * g$ wiederum 2π-periodisch ist, und dass

$$f * g = g * f.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g).$$

(c) Beweisen Sie, dass die Fourier-Reihe von $f * g$ konvergiert gleichmässig.

(d) Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 1, & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

2π-periodisch fortgesetzt.

Berechnen Sie (direkt aus der Definition, ohne Fourier–Reihen)

$$f * f.$$

4. Der Dirichlet Kern (der Ordnung n) ist das trigonometrische Polynom

$$D_n(x) := \sum_{j=-n}^{n} e^{inx}.$$

Beweisen Sie die Formel

$$D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}, \quad x \notin 2\pi\mathbb{Z}.$$

Übungen

Beginn: Dienstag, 26. Oktober

	Zeit	Raum	Assistent
Ada-Bun	Di 15–17	HG D 3.1	Benoit Dherin
Bur-Fer	Di 15-17	HG D 7.2	Lydia Bieri
Fin-Hel	Di 15–17	HG G 26.1	Fabian Ziltener
Her-Lan	Di 15–17	HG E 5	Ben Hambrecht
Lei-Pfe	Di 15–17	ML H 34.3	Peter Kauf
Pia-Sch	Di 15–17	ML J 34.1	Andreas Rüegg
Sch-Tad	Di 15–17	HG D 3.3	Olaf Sommer
Tho-Zur	Di 15–17	ML H 43	Andreas Vogelsanger

Präsenz

Do 12h-13h im HG E18.1

Testatbedingung: 9 Serien sinnvoll bearbeitet.

Abgabe: in den Übungen vom 9. November 2004