Serie 9

1. Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n. Mit $\mathrm{Sym}^k(V)$ bezeichnen wir den Raum der symmetrischen k-Formen auf V. Konstruiere einen Isomorphismus zwischen $\mathrm{Sym}^k(V)$ und dem Raum der homogenen Polynome vom Grad k in n Veränderlichen.

2. Sei V ein K-Vektorraum, $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $k > 0$. Eine alternierende k-Form $\alpha \in \mathrm{Alt}^k(V)$ heisst *zerlegbar*, wenn es Linearformen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ in V^* gibt mit $\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$.

Zeige:

Ist $\dim_K(V) \leq 3$, dann ist jede k-Form in $\mathrm{Alt}^k(V)$ zerlegbar.

Ist $\dim_K(V) = 4$, dann gibt es in $\mathrm{Alt}^2(V)$ unzerlegbare Formen.

3. Sei K ein Körper der Charakteristik ungleich 2, sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis des K^n und $(e^1, \ldots, e^n)$ die Dualbasis. Sei $A = (a_{ij})$ eine schiefsymmetrische $n \times n$-Matrix und $\alpha = \sum_{i<j} a_{ij} e^i \wedge e^j$.

Zeige: Ist $n = 2m$, so gilt

$$\underbrace{\alpha \wedge \ldots \wedge \alpha}_{m \text{ mal}} = \mathrm{Pf}(A) \cdot e^1 \wedge \ldots \wedge e^n,$$

wobei $\mathrm{Pf}(A)$ das Pfaffsche Polynom aus Serie 8 ist.

4. Sei $\gamma : V \times V \to K$ eine alternierende 2-Form. Zeige, dass es eine Basis von V gibt, für die γ durch eine Blockdiagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} B & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & B & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dargestellt wird.

Es empfiehlt sich folgendes Vorgehen: Für $x, y \in V$ sagen wir, dass $x \perp y$, wenn $\gamma(x, y) = 0$. (Beachte, dass nach dieser Definition x zu sich selbst orthogonal ist!) Setze $V_0 = \{x \in V \mid \forall y \in V : x \perp y\}$ und wähle einen Unterraum $E \subset V$ mit $E \oplus V_0 = V$.

(i) Zeige, dass $E \perp V_0$.

(ii) Zeige: Die Einschränkung von γ auf $E \times E$ ist nichtausgeartet.

(iii) Zeige: Für jedes $0 \neq w \in E$ gibt es ein $0 \neq v \in E$ mit der folgenden Eigenschaft: (w, v) ist eine Basis von $P_1 = \operatorname{span}(w, v)$ und die Einschränkung von γ auf $P_1 \times P_1$ hat die Fundamentalmatrix B bezüglich (w, v).

(iv) Zerlege E induktiv in eine geeignete orthogonale Summe $E = P_1 \perp \ldots \perp P_k$ und verwende die Zerlegung, um den Beweis abzuschliessen.

Abgabe: Mittwoch, 2. Juni 2004, in den Übungsgruppen.