D-MATH — Lineare Algebra II — SS 04

Prof. Dr. Horst Knörrer

Serie 8

1. Sei K ein Körper, dessen Charakteristik von 2 verschieden ist, und $A = (a_{ij})$ eine schiefsymmetrische $n \times n$-Matrix über K.

Zeige: Ist n ungerade, so ist $\det A = 0$.

Zeige: Ist $n = 2m$ gerade und

$$P(x_{11}, \dots, x_{nn}) = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)\sigma(2)} x_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots x_{\sigma(n-1)\sigma(n)},$$

wobei über alle $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(2i) > \sigma(2i-1)$ für $1 \le i \le m$ summiert wird, so ist

$$\det A = \big(\frac{1}{m!} P(a_{11}, \dots, a_{nn})\big)^2.$$

Man nennt P ein *Pfaffsches Polynom*.

2. Seien V_1, V_2 und V drei K-Vektorräume und $j_1 : V_1 \to V$ sowie $j_2 : V_2 \to V$ Vektorraumhomomorphismen. Wir nehmen an, dass für jeden K-Vektorraum W und jedes Paar von Homomorphismen $f_1 : V_1 \to W$, $f_2 : V_2 \to W$ genau ein Homormorphismus $f : V \to W$ existiert, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& V_1 \arrow[dl, "j_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\
V \arrow[rr, "f"] & & W \\
& V_2 \arrow[ul, "j_2"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Seien $\iota_1 : V_1 \hookrightarrow V_1 \oplus V_2$ und $\iota_2 : V_2 \hookrightarrow V_1 \oplus V_2$ die natürlichen Inklusionen. Zeige: Es gibt genau einen Isomorphismus $h : V \to V_1 \oplus V_2$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& V_1 \arrow[dl, "j_1"'] \arrow[dr, "\iota_1"] & \\
V \arrow[rr, "\cong", "h"'] & & V_1 \oplus V_2 \\
& V_2 \arrow[ul, "j_2"] \arrow[ur, "\iota_2"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Bitte wenden!

3. Seien $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ und $B \in M(m \times m, \mathbb{C})$ zwei quadratische komplexe Matrizen. Wir betrachten das Tensorprodukt $A \otimes B \in M(n \times n, \mathbb{C}) \otimes M(m \times m, \mathbb{C})$.

Drücke $\mathrm{Spur}(A \otimes B)$ und $\det(A \otimes B)$ in Abhängigkeit von $\mathrm{Spur}(A)$, $\mathrm{Spur}(B)$, $\det(A)$ und $\det(B)$ aus.

Hinweis: Die Menge der diagonalisierbaren komplexen $n \times n$-Matrizen liegt dicht im Raum aller komplexen $n \times n$-Matrizen.

4. Wir betrachten die linearen Abbildungen

$$\alpha : \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v \otimes w \mapsto v \times w$$

$$\beta : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad v \otimes w \mapsto \langle v, w \rangle.$$

Bestimme eine Basis von $\ker \alpha$ und $\ker \beta$.

Abgabe: Mittwoch, 26. Mai 2004, in den Übungsgruppen.