

## Serie 8

1. Sei  $K$  ein Körper, dessen Charakteristik von 2 verschieden ist, und  $A = (a_{ij})$  eine schiefsymmetrische  $n \times n$ -Matrix über  $K$ .

Zeige: Ist  $n$  ungerade, so ist  $\det A = 0$ .

Zeige: Ist  $n = 2m$  gerade und

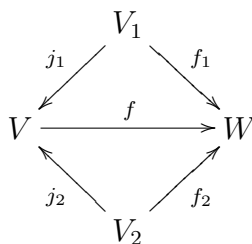
$$P(x_{11}, \dots, x_{nn}) = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)\sigma(2)} x_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots x_{\sigma(n-1)\sigma(n)},$$

wobei über alle  $\sigma \in S_n$  mit  $\sigma(2i) > \sigma(2i - 1)$  für  $1 \leq i \leq m$  summiert wird, so ist

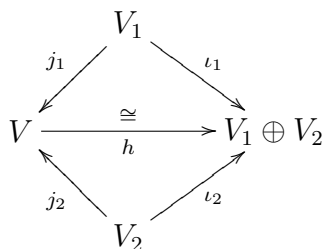
$$\det A = \left( \frac{1}{m!} P(a_{11}, \dots, a_{nn}) \right)^2.$$

Man nennt  $P$  ein *Pfaffsches Polynom*.

2. Seien  $V_1, V_2$  und  $V$  drei  $K$ -Vektorräume und  $j_1 : V_1 \rightarrow V$  sowie  $j_2 : V_2 \rightarrow V$  Vektorraumhomomorphismen. Wir nehmen an, dass für jeden  $K$ -Vektorraum  $W$  und jedes Paar von Homomorphismen  $f_1 : V_1 \rightarrow W, f_2 : V_2 \rightarrow W$  genau ein Homomorphismus  $f : V \rightarrow W$  existiert, für den das Diagramm



kommutiert. Seien  $\iota_1 : V_1 \hookrightarrow V_1 \oplus V_2$  und  $\iota_2 : V_2 \hookrightarrow V_1 \oplus V_2$  die natürlichen Inklusionen. Zeige: Es gibt genau einen Isomorphismus  $h : V \rightarrow V_1 \oplus V_2$ , der das Diagramm



kommutativ macht.

**Bitte wenden!**

3. Seien  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  und  $B \in M(m \times m, \mathbb{C})$  zwei quadratische komplexe Matrizen. Wir betrachten das Tensorprodukt  $A \otimes B \in M(n \times n, \mathbb{C}) \otimes M(m \times m, \mathbb{C})$ .

Drücke  $\text{Spur}(A \otimes B)$  und  $\det(A \otimes B)$  in Abhängigkeit von  $\text{Spur}(A)$ ,  $\text{Spur}(B)$ ,  $\det(A)$  und  $\det(B)$  aus.

Hinweis: Die Menge der diagonalisierbaren komplexen  $n \times n$ -Matrizen liegt dicht im Raum aller komplexen  $n \times n$ -Matrizen.

4. Wir betrachten die linearen Abbildungen

$$\alpha : \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad v \otimes w \mapsto v \times w$$

$$\beta : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \otimes w \mapsto \langle v, w \rangle.$$

Bestimme eine Basis von  $\ker \alpha$  und  $\ker \beta$ .

**Abgabe:** Mittwoch, 26. Mai 2004, in den Übungsgruppen.