# Serie 7

**1.** Sei $V$ ein euklidischer Raum beliebiger Dimension, sei $n \geq 1$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeige: Die Gramsche Determinante $\det\big(\langle v_i, v_j\rangle\big)_{1\leq i,j\leq n}$ verschwindet genau dann, wenn die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig sind.

**2.** Seien $\alpha$, $\beta$ Endomorphismen eines endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraums $V$ mit $\alpha\circ\beta = \beta\circ\alpha$. Sei $\lambda$ ein Eigenwert von $\alpha$ und $V(\lambda)$ der zugehörige verallgemeinerte Eigenraum. Zeige, dass $V(\lambda)$ ein $\beta$-invarianter Unterraum ist.

**3.** Sei $A$ eine $m \times n$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$. Falls $m > n$, ist die Gleichung $Ax = b$ im allgemeinen nicht lösbar. Oft möchte man approximative Lösungen bestimmen, also Vektoren, die die Gleichung "beinahe" erfüllen: Wir suchen $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $Ax$ möglichst nahe an $b$ ist, also $|Ax - b|$ möglichst klein ist. Anders gesagt: Die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{i=1}^n \big((Ax)_i - b_i\big)^2$ soll minimal werden. Daher spricht man auch von der *Methode der kleinsten Quadrate*.

Wir nennen
$$({}^tAA)x = {}^tAb$$
die *Normalgleichungen*. Wir zeigen im folgenden, dass eine Lösung der Normalgleichungen eine "beste approximative Lösung" der Gleichung $Ax = b$ liefert.

Sei $W = \mathrm{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m$ und $P_W : \mathbb{R}^m \to W$ die orthogonale Projektion auf $W$.

(o) Mache Dir klar, dass die Gleichung $Ax = b$ genau dann eine Lösung hat, wenn $b \in W$ ist, und dass die bestmögliche Annäherung an $b$ durch einen Vektor in $W$ mit minimalem Abstand zu $b$ erreicht wird.

(i) Wie kann man einen Vektor in $W$ mit minimalem Abstand zu $b$ finden? Durch welche Eigenschaften ist er charakterisiert?

(ii) Zeige: $Ax = P_W(b) \Leftrightarrow {}^tAAx = {}^tAb$. Die beste Approximation von $b$ wird durch die Lösung der Normalgleichungen gegeben.

(iii) Zeige: Die Normalgleichungen sind stets lösbar.

(iv) Unter welcher Bedingung an $A$ sind die Normalgleichungen eindeutig lösbar?

**Bitte wenden!**

Neben dem Gauss-Algorithmus gibt es weitere, numerisch stabile und effiziente Verfahren zur Lösung der Normalgleichungen:

(v) Sei $A = QR$ die Iwasawa-Zerlegung von $A$ (vgl. Serie 3). Zeige: Die Normalgleichungen sind äquivalent zur Gleichung $Rx = {}^tQb$.

Merke: Da $R$ eine obere Dreiecksmatrix ist, lassen sich die Normalgleichungen dann einfach durch Rückwärtseinsetzen lösen.

(vi) Gelte $\operatorname{rang}(A) = n$ und sei $A = UDQ$ die Singulärwertzerlegung von $A$ (vgl. Serie 4). Zeige: $D$ ist invertierbar und $x = ({}^tQ)D^{-1}({}^tU)b$ ist Lösung der Normalgleichungen.

**4.** (i) Sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimme eine Lösung der Gleichung $Ax = b$ im Sinne der kleinsten Quadrate, d. h. finde ein $x \in \mathbb{R}^3$, für das $|Ax - b|$ minimal ist.

(ii) Gegeben sind vier Punkte in $\mathbb{R}^3$

$$p_1 = (3, -2, 1), \quad p_2 = (2, 1, 0), \quad p_3 = (4, -1, -1), \quad p_4 = (-1, 2, -2).$$

Gesucht ist die Ebene

$$E = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + c = 0\big\}$$

mit $a_1, a_2, a_3, c \in \mathbb{R}$, $a_1 \neq 0$, die obige Punkte in folgender Weise approximiert: Sei $d_i$ der Abstand von $p_i$ zu $E$ in $x_1$-Richtung für $1 \leq i \leq 4$. Dann soll $E$ so gewählt werden, dass $\sum_{i=1}^4 d_i^2$ minimal wird.

**Abgabe:** Mittwoch, 19. Mai 2004, in den Übungsgruppen.