Serie 5

1. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & -8 & 12 \\ 6 & 4 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Bestimme die Jordan-Normalform von A und von B und die zugehörigen Jordan-Basen von $\mathbb{R}^5$.

2. Sei $A \in O(n)$. Zeige: $\operatorname{Im}(A - E) \perp \ker(A - E)$.

3. Sei $H(n)$ der reelle Vektorraum der hermiteschen komplexen $n \times n$-Matrizen mit Spur 0.

(i) Bestimme $\dim_{\mathbb{R}} H(n)$.

(ii) Zeige: Sind A, B in $H(n)$, so ist auch

$$[A, B] := i(AB - BA)$$

in $H(n)$. Man nennt $[A, B]$ das Lie-Produkt von A und B.

(iii) Zeige: Für alle $A, B \in H(n)$ ist $[A, B] = -[B, A]$, und für $A, B, C \in H(n)$ gilt die Jacobi-Identität

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

(iv) Zeige:

$$\langle A, B \rangle := \tfrac{1}{2} \cdot \operatorname{Spur}(A \cdot B)$$

ist ein euklidisches Skalarprodukt auf $H(n)$.

(v) Zeige: Ist $T \in U(n)$, so ist

$$\operatorname{ad}(T) : H(n) \to H(n),\ A \mapsto TAT^{-1}$$

eine orthogonale Abbildung.

Bitte wenden!

(vi) Zeige: $T \mapsto \mathrm{ad}(T)$ ist ein Homomorphismus von $U(n)$ in die Gruppe der orthogonalen Endomorphismen von $H(n)$; diese Gruppe ist isomorph zu $O(\dim H(n))$.

(vii) Zeige, dass die Matrizen

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $H(2)$ bilden. Sie heissen Pauli-Spin-Matrizen.

(viii) Zeige: Es gibt einen Isomorphismus

$$\kappa : H(2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3,$$

so dass $\kappa(E_\ell) = 2e_\ell$ für $1 \leq \ell \leq 3$ und

$$\kappa([A, B]) = \kappa(B) \times \kappa(A)$$

für alle $A, B \in H(2)$.

(ix) Es sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix und

$$e^A = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell.$$

Zeige: A ist genau dann in $H(n)$, wenn $e^{itA} \in SU(n)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Abgabe: Mittwoch, 5. Mai 2004, in den Übungsgruppen.