Serie 4

1. Zeige für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^3$

$$\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$$

und für alle $v, w, q \in \mathbb{R}^3$

$$\langle v \times q, w \times q \rangle = \langle v, q \times (w \times q) \rangle.$$

2. Sei $G = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Führe für G eine Hauptachsentransformation durch, d. h. bestimme $T \in \mathrm{SO}(4)$ und eine Diagonalmatrix D, so dass $D = T^{-1}GT$.

Tipp: Bei der Faktorisierung des charakteristischen Polynoms von G hilft die Tatsache, dass das Produkt der Nullstellen den konstanten Term ergibt.

3. Mit $S^{n-1} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \,\}$ bezeichnen wir die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$. Sei A eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Zeige für $1 \leq r \leq n$, dass

$$\lambda_r = \min_{W \subset \mathbb{R}^n,\, \dim W = r} \max\{\, {}^t x A x \mid x \in W \cap S^{n-1} \,\}.$$

4. Sei A eine reelle $m \times n$-Matrix mit $m \geq n$. Ziel der Aufgabe ist ein Beweis der folgenden Tatsache:

Die Matrix A besitzt eine Zerlegung der Form $A = UDQ$, wobei $Q \in O(n)$ ist, D eine $n \times n$-Diagonalmatrix mit nichtnegativen Einträgen und U eine $m \times n$-Matrix, deren Spalten ein Orthonormalsystem in $\mathbb{R}^m$ bilden.

Insbesondere lässt sich jede reelle $n \times n$-Matrix A in der Form $A = UDQ$ mit orthogonalen Matrizen U, Q und einer Diagonalmatrix D schreiben.

Diese Zerlegung heisst Singulärwert- oder Cartan-Zelegung.

Bitte wenden!

(i) Zeige: Es gibt einen Vektor $v \in S^{n-1}$ mit der Eigenschaft $|Av| \geq |Ax|$ für alle $x \in S^{n-1}$. (Beachte: S^{n-1} ist kompakt.)

(ii) Zeige: Für dieses v und beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: wenn $x \perp v$, so auch $Ax \perp Av$. (Beachte: Für $x, v \in S^{n-1}$ und für alle φ ist auch $(\cos\varphi)v + (\sin\varphi)x \in S^{n-1}$. Untersuche die Funktion $\varphi \mapsto \big|A\big((\cos\varphi)v + (\sin\varphi)x\big)\big|^2$ und ihre Maxima.)

(iii) Sei

$$V = (\mathbb{R} \cdot v)^{\perp} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v \rangle = 0 \,\}$$

und

$$V' = (\mathbb{R} \cdot Av)^{\perp} = \{\, y \in \mathbb{R}^m \mid \langle y, Av \rangle = 0 \,\}.$$

Zeige: Es gibt orthogonale Matrizen $\tilde{U}$ und $\tilde{Q}$, so dass

- $\tilde{U}(V') = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ und
- $\tilde{Q}(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) = V$ und
- $\tilde{U}A\tilde{Q} = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & |Av| \end{pmatrix}$ mit einer geeigneten $(m-1) \times (n-1)$-Matrix A'.

(iv) Beweise nun die Existenz der Zerlegung $A = UDQ$ unter Verwendung der vorangehenden Überlegungen. Schreibe dabei $m = n + k$, halte k fest und führe vollständige Induktion nach n durch.

Abgabe: Mittwoch, 28. April 2004, in den Übungsgruppen.