Serie 3

1. Sei V ein reeller Vektorraum und $\gamma : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, so dass $\gamma(v,v) = 0$ für alle $v \in V$. Folgt dann $\gamma = 0$?

2. Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf dem endlichdimensionalen Vektorraum V und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi^\dagger : V \to V$ mit der Eigenschaft, dass $\langle \varphi x, y\rangle = \langle x, \varphi^\dagger y\rangle$ für alle $x, y \in V$.

Die Abbildung $\varphi^\dagger$ heisst die zu φ adjungierte Abbildung.

Zeige, dass $\ker \varphi^\dagger = (\operatorname{Im}\varphi)^\perp$ und $\operatorname{Im}\varphi^\dagger = (\ker\varphi)^\perp$, sowie dass $\ker\varphi = (\operatorname{Im}\varphi^\dagger)^\perp$ und $\operatorname{Im}\varphi = (\ker\varphi^\dagger)^\perp$.

3. Sei A eine reelle $m \times n$-Matrix mit linear unabhängigen Spalten.

Zeige: Man kann A als Produkt $A = QR$ zerlegen, wobei

- Q eine $m \times n$-Matrix ist, deren Spalten eine Orthonormalbasis des von den Spalten von A aufgespannten Vektorraums sind, und
- R eine invertierbare obere Dreiecksmatrix der Grösse $n \times n$ ist.

Insbesondere lässt sich jedes $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ in der Form $A = QR$ mit einer orthogonalen Matrix Q und einer oberen Dreiecksmatrix R schreiben.

Diese Zerlegung heisst Iwasawa- oder QR-Zerlegung von A.

Hinweis: Wende das Verfahren von Gram-Schmidt auf die Spalten von A an. Schreibe dann die Spaltenvektoren von A als Linearkombination der Orthonormalbasis und verwende die Koeffizienten zur Konstruktion von R.

Zusatz (freiwillig): Für $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ wird die Darstellung eindeutig, wenn man zusätzlich fordert, dass alle Diagonaleinträge von R positiv sind.

4. Sei $A = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 10 & -6\sqrt{6} & 2\sqrt{2} \\ 6\sqrt{6} & 9 & -3\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} & 3\sqrt{3} & 17 \end{pmatrix}$.

Verifiziere, dass $A \in \mathrm{SO}(3)$. Bestimme Drehachse und Drehwinkel von A.

Bitte wenden!

5. Zur Erinnerung: Der Laplaceoperator Δ ist definiert als

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Wir verwenden Begriffe und Notationen von Serie 1, Aufgabe 3, sowie Serie 2, Aufgabe 5. Ferner nennen wir

$$H_{n,k} = \left\{ p \in P_{n,k} \mid \Delta p = 0 \right\}$$

den Vektorraum der **harmonischen homogenen Polynome** vom Grad k in n Veränderlichen. Da Δ linear ist, ist $H_{n,k}$ tatsächlich ein Untervektorraum von $P_{n,k}$. Das Ziel dieser Aufgabe ist, die Dimension von $H_{n,k}$ zu bestimmen.

Betrachte die Abbildung

$$P_{n,k-2} \longrightarrow P_{n,k}\,, \quad p \mapsto |x|^2 p = p(x) \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^2.$$

(i) Zeige: Diese Abbildung ist linear und injektiv; ihr Bild W ist ein Untervektorraum von $P_{n,k}$ der Dimension $\dim W = \dim P_{n,k-2}$.

(ii) Zeige mit Hilfe von Serie 2, Aufgabe 5, und der Beziehung $(|x|^2)(D) = \Delta$, dass

$$H_{n,k} = W^{\perp}.$$

(iii) Zeige mit Hilfe der Teile (i) und (ii) sowie von Serie 1, Aufgabe 3, dass

$$\dim H_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-3}{k-2}.$$

(iv) Folgere aus (iii), dass

$$\dim H_{n,k} = \frac{(n+k-3)!}{(n-2)!\,k!}(n+2k-2)$$

Abgabe: Mittwoch, 21. April 2004, in den Übungsgruppen.