Serie 2

1. Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz besagt, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|.$$

Beweise die Ungleichung, indem Du zeigst, dass $|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2$ eine Summe von Quadraten ist.

2. (i) Im unitären Vektorraum $\mathbb{C}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt soll die Basis $\big((1,0,i),(2,1,1+i),(0,1,0)\big)$ nach dem Verfahren von Gram-Schmidt orthonormiert werden.

(ii) Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}x^2 \subset \mathbb{R}[x]$ mit Skalarprodukt

$$\langle p, q\rangle = \int_0^\infty p(t)q(t)e^{-t}dt.$$

Orthonormiere die Basis $(1, x, x^2)$ nach dem Verfahren von Gram-Schmidt.

3. Sei V ein K-Vektorraum und γ eine Bilinearform auf V. In der Vorlesung wurde folgender Satz bewiesen:

Seien $B = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\tilde{B} = (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)$ Basen von V, seien G bzw. $\tilde{G}$ die Fundamentalmatrizen von γ bezüglich B bzw. $\tilde{B}$ und sei T die Matrix der Basistransformation von B zu $\tilde{B}$. Dann ist

$$G = {}^tT\tilde{G}T.$$

Beweise diesen Satz erneut unter Verwendung des "kanonischen" Isomorphismus

$$\mathrm{Bil}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, V^*).$$

Bitte wenden!

4. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine quadratische Form $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\gamma : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 - 2x_2^2.$$

Bestimme die zugehörige symmetrische Bilinearform $\gamma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und die Abbildung $\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, so dass $\gamma(x, y) = \langle x, \Gamma y \rangle$.

5. Auf dem komplexen Vektorraum $P_{n,k}$ definieren wir für alle homogenen Polynome $p = \sum_{|\alpha|=k} p_\alpha x^\alpha$ und $q = \sum_{|\alpha|=k} q_\alpha x^\alpha$ das Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \sum_{|\alpha|=k} \alpha! p_\alpha \bar{q}_\alpha$$

wobei $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \ldots \alpha_n!$ für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, sowie die Differentialoperatoren

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \qquad \text{und} \qquad p(D) = \sum_{|\alpha|=k} p_\alpha D^\alpha.$$

(Zur Definition von $P_{n,k}$ und zum Begriff des homogenen Polynoms vgl. Serie 1, Aufgabe 3). Dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tatsächlich ein Skalarprodukt ist, müsste noch nachgeprüft werden. Dies ist aber einfach zu sehen und wird hier nicht erwartet.

Zeige: Für $p, q \in P_{n,k}$ gilt

$$\langle p, q \rangle = p(D)\bar{q}(x).$$

Abgabe: Mittwoch, 14. April 2004, in den Übungsgruppen.