Serie 13

1. Sei $R > 0$ und A eine komplexe $n \times n$-Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Sei ausserdem f eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Zeige:

(i) Gilt $|\lambda_i| < R$ für $1 \leq i \leq n$, so ist A zu einer Matrix B mit $\|B\| < R$ konjugiert.

(ii) Gilt $|\lambda_i| < R$ für $1 \leq i \leq n$, so konvergiert $f(A)$.

(iii) Gibt es ein i mit $\lambda_i > R$, so divergiert $f(A)$.

2. Zeige, dass $\exp : \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ nicht surjektiv ist. Welche Werte kann $\mathrm{Spur}(\exp(A))$ für $A \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ annehmen?

3. Sei $(1, i, j, k)$ die kanonische Basis der Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$ über $\mathbb{R}$. Für jedes $u = \alpha \cdot 1 + \beta i + \gamma j + \delta k \in \mathbb{H}$ heisse $\mathrm{Re}(u) = \alpha$ der reelle Anteil von u und $\mathrm{Ve}(u) = (\beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^3$ der vektorielle Anteil von u. Ist $\mathrm{Ve}(u) = 0$, so heisst u skalar, ist $\mathrm{Re}(u) = 0$, so heisst u vektoriell. Zeige:

(i) Seien $u, v \in \mathbb{H}$. Genau dann gilt $uv = vu$, wenn die Vektoren $\mathrm{Ve}(u)$ und $\mathrm{Ve}(v)$ linear abhängig sind.

(ii) Seien $0 \neq u, v \in \mathbb{H}$. Genau dann gilt $uv = -vu$, wenn $\mathrm{Re}(u) = \mathrm{Re}(v) = 0$ und $\langle \mathrm{Ve}(u), \mathrm{Ve}(v) \rangle = 0$.

(iii) Sei $u \in \mathbb{H}$ nicht skalar und $v \in \mathbb{H}$ mit der Eigenschaft, dass sowohl $u + v$ als auch uv skalar sind. Dann ist $v = \bar{u}$.

4. Sei $A = \dfrac{1}{18} \begin{pmatrix} 10 & -6\sqrt{6} & 2\sqrt{2} \\ 6\sqrt{6} & 9 & -3\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} & 3\sqrt{3} & 17 \end{pmatrix}$ die Drehmatrix aus Serie 3, Aufgabe 4.

Bestimme die Eulerschen Winkel von A, d. h. $(\varphi, \vartheta, \psi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

5. Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $(e_1, ..., e_n)$. Sei

$$\begin{array}{rccc} a_i : & \bigwedge V & \longrightarrow & \bigwedge V \\ & \alpha & \longmapsto & e_i \wedge \alpha \end{array}$$

der Erzeugungsoperator an der Stelle i. Ferner sei $a_i^\dagger : \bigwedge V \to \bigwedge V$ der Vernichtungsoperator, der durch

$$a_i^\dagger(e_I) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \notin I, \\ (-1)^r e_{I \setminus \{i\}} & \text{falls } i \in I, \end{cases}$$

definiert ist, wobei

$$r = \{j \in I \mid j < i\}.$$

Zeige die Antikommutationsregeln

$$a_i^\dagger a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i^\dagger = a_i a_j + a_j a_i = 0,$$

$$a_i^\dagger a_j + a_j a_i^\dagger = \delta_{ij} E.$$

Abgabe: Mittwoch, 30. Juni 2004, in den Übungsgruppen.