Serie 12

1. Sei $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine positiv definite quadratische Form mit Fundamentalmatrix A bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)}\, dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} .$$

2. Mit $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ bezeichnen wir den Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}^3$. Die quantenmechanischen Drehimpulsoperatoren $L_j : C^\infty(\mathbb{R}^3) \to C^\infty(\mathbb{R}^3)$ für $j = 1, 2, 3$ sind durch

$$\begin{aligned}
(L_1 f)(x,y,z) &= \frac{1}{i}\Big(y\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) - z\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\Big)\\
(L_2 f)(x,y,z) &= \frac{1}{i}\Big(z\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - x\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\Big)\\
(L_3 f)(x,y,z) &= \frac{1}{i}\Big(x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\Big)
\end{aligned}$$

erklärt. Zeige: Der von diesen linearen Operatoren aufgespannte dreidimensionale komplexe Vektorraum ist eine Lie-Algebra vermöge der Lie-Klammer

$$[L_i, L_j] = L_i \circ L_j - L_j \circ L_i.$$

3. Gib eine 3×3-Matrix A über $\mathbb{R}$ an, für die

$$A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

4. Sei A eine feste $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$ und L eine differenzierbare matrixwertige Funktion auf $\mathbb{R}$ (d. h. für $t \in \mathbb{R}$ ist $L(t)$ eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$), so dass die Gleichung

$$\frac{d}{dt}L(t) = [A, L](t) := [A, L(t)] \tag{1}$$

erfüllt ist (ein solches Paar (A, L) heisst **Lax-Paar**).

Zeige:

(i) $\dfrac{d}{dt}L^k(t) = [A, L^k](t)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(ii) $\dfrac{d}{dt}\mathrm{Spur}\big(L^k(t)\big) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(iii) Die Lösung der Matrizendifferentialgleichung (1) ist durch

$$L(t) = e^{tA}Le^{-tA}$$

gegeben, wobei $L = L(0)$ ist.

Abgabe: Mittwoch, 23. Juni 2004, in den Übungsgruppen.