Serie 11

1. Sei V ein Vektorraum der Dimension n, sei $\alpha : V \to V$ ein Endomorphismus und $\chi(t) = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} t^j$ das charakteristische Polynom von α. Zeige für $1 \leq k \leq n$:

$$a_k = (-1)^{n-k} \cdot \operatorname{Spur}\big(\operatorname{Alt}^k(\alpha)\big).$$

2. Seien $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig in V. Zeige, dass

$$L(v_1, \ldots, v_k) = \{x \in V \mid v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge x = 0\}.$$

3. Sei A eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, die so geordnet sind, dass $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_n|$. Zeige

$$\|A\| = |\lambda_n|.$$

4. Seien A, B zwei $n \times n$-Matrizen und $[A, B] = AB - BA$ ihr Kommutator. Man erinnere sich, dass $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

Zeige: Wenn $[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$, dann gilt

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}.$$

Hinweis: Setze $T(t) = e^{tA} e^{tB}$ und bestimme eine Differentialgleichung für T.

Abgabe: Mittwoch, 16. Juni 2004, in den Übungsgruppen.