Serie 10

1. Beschreibe die lineare Abbildung

$$\varphi : \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v \wedge w \mapsto v \times w$$

durch Basen. Ist sie ein Isomorphismus?

2. Sei V ein Vektorraum mit Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ und

$$g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \cdot e^i \otimes e^j$$

eine Bilinearform auf V. Sei $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ eine zweite Basis von V und $T = (t^i_j)$ die Matrix des Basiswechsels von $(e_1, \ldots, e_n)$ zu $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$, d. h. $e_j = \sum_{i=1}^n t^i_j \tilde{e}_i$ für $1 \leq j \leq n$. Schreibe

$$g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \tilde{g}_{ij} \cdot \tilde{e}^i \otimes \tilde{e}^j.$$

Bestimme eine Formel, die die Transformation der Fundamentalmatrix von g beschreibt, also (g_{ij}) in Abhängigkeit von $(\tilde{g}_{ij})$.

3. Sei K ein Körper, dessen Charakteristik von 2 verschieden ist, $n = 2m$ und A eine schiefsymmetrische $n \times n$-Matrix über K. Mit Pf bezeichnen wir das Pfaffsche Polynom (vgl. Serie 8).

(i) Sei $T \in \mathrm{GL}(n, K)$. Verwende Aufgabe 3 von Serie 9 um zu zeigen, dass

$$\mathrm{Pf}({}^tTAT) = \det(T) \cdot \mathrm{Pf}(A).$$

(ii) Verwende (i) sowie Aufgabe 4 von Serie 9 um zu zeigen, dass

$$\det(A) = \Big(\frac{1}{m!}\mathrm{Pf}(A)\Big)^2.$$

Abgabe: Mittwoch, 9. Juni 2004, in den Übungsgruppen.