Serie 1

1. Seien W ein Vektorraum und U, V Unterräume von W.

(i) Gib einen Isomorphismus

$$(U+V)/U \xrightarrow{\sim} V/(U \cap V)$$

an.

(ii) Es gelte zusätzlich $U \subset V$. Zeige, dass man eine kanonische injektive lineare Abbildung

$$V/U \longrightarrow W/U, \quad v+U \mapsto v+U$$

hat, dass also $V/U \subset W/U$. Zeige ausserdem: Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$W/V \xrightarrow{\sim} (W/U)/(V/U).$$

2. Seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.

(i) Zeige: $\lambda \in K$ ist genau dann ein Eigenwert von f, wenn λ ein Eigenwert der dualen Abbildung f^* ist.

(ii) Sei $p \in K[x]$ ein Polynom. Zeige: Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(f)$.

(iii) Zeige: Wenn $f^2 = f$, dann ist $V = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

(iv) Zeige: Wenn $f^2 = \mathrm{id}$, dann existieren Unterräume V_+ und V_- von V, so dass $V = V_+ \oplus V_-$ und $f(v) = v$ für alle $v \in V_+$ und $f(v) = -v$ für alle $v \in V_-$.

Bitte wenden!

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein **Multiindex** α ist ein Element von $\mathbb{N}_0^n$, d. h. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$. Wir setzen

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad \text{für } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

Sei ausserdem $k \in \mathbb{N}$. Dann heisst

$$P_{n,k} = \left\{ \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k} c_{\alpha_1\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \;\middle|\; c_\alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

der Vektorraum der (komplexen) **homogenen Polynome in** n **Veränderlichen vom Grad** k.

Zeige:

(i) Die Monome x^α, wobei α über alle Multiindizes mit $|\alpha| = k$ läuft, bilden eine Basis von $P_{n,k}$.

(ii) $\dim P_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$.

Abgabe: Mittwoch, 7. April 2004, in den Übungsgruppen.