Serie 9

1. Gegeben sei eine reelle $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$, $1 \le i, j \le n$, mit

a) $|a_{ii}| \ge 1$ für $1 \le i \le n$, und

b) $|a_{ij}| < \dfrac{1}{n-1}$ für $i \ne j$.

Zeige, dass A regulär ist.

2. Gegeben sind die vier Polynome

$p_1(x) = x^3 + x^2$, $p_2(x) = x^2 - 2x - 4$, $p_3(x) = 3x + 4$ und $p_4(x) = 2x + 3$.

a) Man schreibe das Polynom $2x^3 + 3x^2 - 1$ als Linearkombination der Polynome $p_k(x)$ $(k = 1, \ldots, 4)$.

b) Man führe die Polynomdivisionen $p_1 : p_2$, $p_1 : p_3$, und $p_1 : p_4$ aus.

3. Man führe die folgende Polynomdivision aus:

$(x^6 + x^5 - x^3 - 2x^2 + 1) \,:\, (x^2 - 1)$.

4. Man berechne die Determinante der reellen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 10 & 4 \\ 2 & 5 & 11 & 7 \\ 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. Seien a und b Elemente eines Körpers K und A die $(n \times n)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} b & a & \ldots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \ldots & a & b \end{pmatrix}.$$

Man beweise: $\det(A) = (b-a)^{n-1}\big(b + (n-1)a\big)$.