Serie 8

1. Man betrachte die lineare Selbstabbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, die bezüglich der kanonischen Basis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Man zeige, dass $f^2 = f \circ f \neq 0$ und $f^3 = f \circ f \circ f = 0$. Man finde eine Basis $\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big)$ von $\mathbb{R}^3$ derart, dass $A\vec{u} = \vec{0}$, $A\vec{v} = \vec{u}$, $A\vec{w} = \vec{v}$. Man bestimme die Matrix von f bezüglich der Basis $\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big)$.

2. Man bestimme die allgemeine Lösung des reellen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 3\,x_2 - 4\,x_3 + 3\,x_4 &= 9 \\ 3\,x_1 + 9\,x_2 - 2\,x_3 - 11\,x_4 &= -3 \\ 4\,x_1 + 12\,x_2 - 6\,x_3 - 8\,x_4 &= 6 \\ 2\,x_1 + 6\,x_2 + 2\,x_3 - 14\,x_4 &= -12. \end{aligned}$$

3. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die reelle Matrix

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar? Für diese λ berechne man die inverse Matrix A_λ^{-1}.

4. Sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5 : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + x_2 + 5x_4, x_2, 3x_1 + x_4, 2x_2 - x_3, x_1)$, und seien

$$\begin{aligned} a &= \big((2,2,0,1), (0,1,1,1), (4,2,1,1), (3,2,3,2)\big), \\ b &= \big((1,0,0,3,0), (2,2,0,0,1), (1,1,0,0,0), (2,1,1,1,1), (1,1,1,1,1)\big), \\ c &= \big((1,0,0,1,0), (1,1,0,0,1), (0,2,0,4,0), (0,0,3,2,1), (2,0,2,0,2)\big). \end{aligned}$$

Bitte wenden!

a) Man stelle den Vektor $(1,0,0,3,0)$ bezüglich (1) der Standartbasis (2) der Basis b, und (3) der Basis c dar.

b) Man bestimme die Matrixtransformation (1) von b nach c und (2) von c nach b.

c) Man bestimme die Matrixdarstellungen von f bezüglich (1) der Standardbasen (2) der Basen a und b, und (3) der Basen a und c.

5. Sei W der Untervektorraum in $\mathbb{R}^5$, der von $v_1 = (1,0,0,3,0)$, $v_2 = (2,2,0,0,1)$, und $v_3 = (1,1,0,0,0)$ erzeugt wird.

a) Man überprüfe die lineare Unabhängigkeit der Vektoren v_1, v_2, und v_3.

b) Man überprüfe, dass $w_1 = (3,2,0,3,1)$, $w_2 = (2,1,0,3,0)$, und $w_3 = (3,3,0,0,1)$ eine Basis von W ist.

c) Man bestimme die Basistransformation von $\big(v_1, v_2, v_3\big)$ nach $\big(w_1, w_2, w_3\big)$.

d) wie in c) aber von $\big(w_1, w_2, w_3\big)$ nach $\big(v_1, v_2, v_3\big)$.