Serie 7

1. Man betrachte das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit n Unbekannten:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
-x_1 & + & x_2 & & & = & b_1 \\
x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & b_2 \\
x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & b_3 \\
\ldots & - & \ldots & + & \ldots & = & \ldots \\
x_{n-2} & - & 2x_{n-1} & + & x_n & = & b_{n-1} \\
 & - & x_{n-1} & + & x_n & = & b_n
\end{array}$$

a) Man bestimme die allgemeine Lösung des homogenen Systems.

b) Für welche rechten Seiten hat dieses System eine Lösung ?

c) Man bestimme die allgemeine Lösung dieses Systems für beliebige rechte Seiten.

d) Man bestimme die allgemeine Lösung dieses Systems für $n = 4$ und $b_1 = 5$, $b_2 = 10$, $b_3 = 4$, und $b_4 = 15$.

2. Man bestimme die Anzahl der Elemente von $GL(n, \mathbb{F}_2)$.

3. Man berechne die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Seien $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
f : (x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_4) \\
g : (x_1, x_2) &\mapsto (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 3x_1),
\end{aligned}$$

und sei $a = \big((1,0,1,0), (1,4,2,2), (1,1,1,1), (2,0,3,0)\big)$, b die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$, $c = \big((1,3,4), (2,0,1), (1,1,2)\big)$.

a) Man zeige, dass a eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und c eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

Bitte wenden!

b) Man bestimme $g \circ f$ und die Matrixdarstellungen von

(i) f bezüglich der Basen a, b.

(ii) g bezüglich der Basen b, c.

(iii) $g \circ f$ bezüglich der Basen a, c.

5. Sei K ein Körper und $A \in GL(n, K)$ eine Matrix, so dass für alle Matrizen $B \in GL(n, K)$ gilt $AB = BA$. Man zeige $A = \lambda \cdot E$ für ein $\lambda \in K^*$. Insbesondere ist also $K^* \cdot E$ das Zentrum von $GL(n, K)$.