Prof. Dr. Horst Knörrer

Serie 6

1. Man betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & c & \mapsto & \mathrm{Re}(c) \end{array}$$

a) Man zeige, dass f als Abbildung zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen linear ist.

b) Ist f auch linear als Abbildung zwischen $\mathbb{C}$-Vektorräumen?

2. Seien S und S' Matrizen in Zeilenstufenform. Ferner sei L (bzw. L') der von den Zeilen von S (bzw. S') aufgespannte Vektorraum. Man zeige:

$$L = L' \Leftrightarrow S = S'.$$

3. Seien

$$\begin{array}{ll} x_1 = (1,1,1,1), & y_1 = (1,0,3,3) \\ x_2 = (1,2,1,1), & y_2 = (-2,-3,-5,-4) \\ x_3 = (1,1,2,1), & y_3 = (2,2,5,4) \\ x_4 = (1,3,2,3), & y_4 = (-2,-3,-4,-4) \end{array}$$

Vektoren aus $\mathbb{R}^4$. Man zeige, dass $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ Basen des $\mathbb{R}^4$ sind, und man berechne die Basis-Transformation von X nach Y.

4. Sei $0 \neq (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$. Welchen Rang hat die Matrix $(\lambda_i \cdot \lambda_j) \in M(n \times n, K)$?

5. Eine Matrix $N \in M(n \times n, K)$ heisst **nilpotent**, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $N^m = 0$. Man zeige: Für jede n-reihige quadratische nilpotente Matrix N ist $E - N$ invertierbar, und es gilt (für $N^m = 0$)

$$(E - N)^{-1} = \sum_{i=0}^{m} N^i, \text{ mit } N^0 := E.$$