Serie 5

1. Seien U, V Untervektorräume eines endlich erzeugten K-Vektorraums W. Zeigen Sie

$$\dim\,(U \cap V) + \dim\,(U + V) = \dim\,U + \dim\,V.$$

Ist insbesondere $W = U \oplus V$, so ist $\dim\,W = \dim\,U + \dim\,V$.

Hinweis Wähle eine Basis $w_1, \dots, w_r$ von $U \cap V$. Ergänze sie dann zu einer Basis $w_1, \dots, w_r, u_1, \dots u_s$ von U und zu einer Basis $w_1, \dots, w_r, v_1, \dots v_t$ von V. Zeige, dass $w_1, \dots, w_r, u_1, \dots u_s, v_1, \dots v_t$ eine Basis von $U + V$ ist.

2. Bringen Sie die folgenden Matrizen in die Zeilenstufenform:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Dann sei die folgende $n \times (n+1)$-Matrix:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & & & \dots & & & 0 & b_1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & & \dots & & & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & & & 0 & b_3 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & b_{n-2} \\ 0 & & \dots & & & 0 & 1 & -2 & 1 & b_{n-1} \\ 0 & & \dots & & & & 0 & -1 & 1 & b_n \end{pmatrix}$$

3. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Dann kann man V auch als Vektorraum über $\mathbb{R}$ auffassen, indem man die Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times V \to V$ einfach auf $\mathbb{R} \times V$ einschränkt. Je nachdem, ob man V als $\mathbb{C}$- oder $\mathbb{R}$-Vektorraum auffasst, haben die Begriffe “Dimension” und ”lineare Hülle” eine andere Bedeutung, und wir

Bitte wenden!

schreiben zur Unterscheidung $\dim_{\mathbb{R}} V$, $\dim_{\mathbb{C}} V$, $L_{\mathbb{R}}(v_1, \ldots, v_n)$, $L_{\mathbb{C}}(v_1, \ldots, v_n)$. Beweise:

$$\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} V,$$

wenn $\dim_{\mathbb{C}} V$ endlich ist. Sei $(v_1, \ldots v_r)$ eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums V. Gib eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums V an.

4. Im $\mathbb{R}^5$ seien die Vektoren $v_1 = (1, 2, 3, 4, 0)$, $v_2 = (-1, 1, -2, -3, 3)$, $v_3 = (1, -1, 2, 3, -3)$, $v_4 = (2, 10, 14, 10, 10)$ und $w_1 = (1, 6, 6, 8, 6)$, $w_2 = (1, 2, 1, 0, 3)$, $w_3 = (2, 4, 2, 2, -4)$, $w_4 = (-1, 2, 1, 3, -2)$ gegeben. Wähle aus v_1, v_2, v_3, v_4 bzw. w_1, w_2, w_3, w_4 Vektoren aus, die eine Basis von $L(v_1, v_2, v_3, v_4)$ bzw. $L(w_1, w_2, w_3, w_4)$ bilden.