Serie 4

1. Betrachte die Unterräume $U = L\big((1,3,0,1),(1,0,0,-1),(-1,3,0,3)\big)$ und $W = L\big((0,3,2,2),(0,0,2,0)\big)$ des Vektorraumes $\mathbb{R}^4$. Bestimme Basen und die Dimension von $U, W, U \cap W$ und $U + W$.

2. Sei K ein Körper. Betrachte folgende Unterräume von K^n:

$$U := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n \,|\, \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0\}$$

$$D := \{(\alpha, \dots, \alpha) \in K^n | \alpha \in K\}.$$

Bestimme Basis und Dimension von $U, D, U \cap D$ und $U + D$.

3. Zeige, dass die Funktionen $\varphi_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\varphi_n(x) = \frac{1}{n+x}$, für $n \in \mathbb{N}$ linear unabhängig sind.

4. Bestimme in den folgenden vier Fällen, ob die Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden; Wenn nicht, bilden sie dann eine Basis eines Unterraums von $\mathbb{R}^4$?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$