Serie 3

1. (*Aufgabe 3 der Serie 2*) Beweise, dass es keinen Isomorphismus von Vektorräumen zwischen $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ gibt.

Hinweis: Zeige, dass eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$ nicht injektiv sein kann.

2. Welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sind linear:

a) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_4 \\ 2x_4 \\ 3x_4 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

3. Gib eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an, so dass $\varphi^n = 0$, $\varphi^{n-1} \neq 0$.

4. Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass es Skalare $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu .$$

5. Zeige, dass für Unterräume U_1, U_2 eines Vektorraums V die Mengen $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ auch Unterräume von V sind.