Serie 13

1. Sei die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ gegeben. Mit der Hilfe des Satzes von Caley-Hamilton berechne man A^{10}.

2. Sei K ein Körper und $A \in GL(n, K)$ mit dem characteristischen Polynom
$$f(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n.$$
Man zeige, dass
$$A^{-1} = -\frac{1}{a_n}(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \ldots + a_{n-2} A + a_{n-1} I_n).$$

3. Sei K ein Körper. Für ein Polynom $f \in K[x]$, setze man $f_0(x) = f(x)$, ... ,$f_{n+1}(x) = \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x}$ (= 0, falls f konstant ist). Man definiert nun einen Endomorphismus durch
$$\begin{array}{rccl} A: & K[x] & \rightarrow & K[x] \\ & f & \mapsto & x \cdot f'(x) + \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x), \end{array}$$
(beachte, dass $f_j = 0$ ist für $\deg(f) < j$). Offenbar bildet A den Raum V_n der Polynome vom Grad $\leq n$ wieder in sich ab. Berechne die Eigenwerte von $A|V_n : V_n \rightarrow V_n$.

4. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Seien $0 \neq \varphi \in V^*$ und $0 \neq h \in ker(\varphi)$ gegeben. Man bestimme die Eigenwerte und die Determinante der linearen Abbildung :
$$\begin{array}{rccl} f: & V & \rightarrow & V \\ & v & \mapsto & v + \varphi(v) \cdot h \end{array}$$

5. Gegeben seien die Vektoren $d_1 = (1, 2, 0)$, $d_2 = (0, 1, 1)$, und $d_3 = (1, 1, 0)$. Man zeige, dass $d = (d_1, d_2, d_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist, und man berechne die duale Basis.

6. Seien U, V Unterräume eines Vektorraumes W. Man zeige, dass
$$(U + V) \big/ (U \cap V) \cong U \big/ (U \cap V) \oplus V \big/ (U \cap V).$$