D-Math | Lineare Algebra | WS 03/04

Prof. Dr. Horst Knörrer

Serie 12

1. Man identifiziere $M(n\times n,\mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$. Die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^{n^2}$ definiert so eine Metrik d auf $M(n\times n,\mathbb{R})$.

1. Man zeige: $GL(n,\mathbb{R})$ ist offen in $M(n\times n,\mathbb{R})$
2. Für alle $A\in M(n\times n,\mathbb{R})$ und alle $\varepsilon>0$ gibt es $A'\in GL(n,\mathbb{R})$ mit $d(A,A')<\varepsilon$ (Man sagt: $GL(n,\mathbb{R})$ ist dicht in $M(n\times n,\mathbb{R})$.

2. Sei $K[t]$ das Polynomring über einen Körper K, und für $1\le i,j\le n$, seien $a_{ij}(t)\in K[t]$. Man zeige, dass

$$\frac{d}{dt}\det\begin{pmatrix}a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t)\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t)\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\det\begin{pmatrix}a_{11}(t) & \dots & a'_{1k}(t) & \dots & a_{1n}(t)\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(t) & \dots & a'_{nk}(t) & \dots & a_{nn}(t)\end{pmatrix}.$$

3. Man bestimme das Minimalpolynom und das charakterische Polynom der reellen Matrix

$$\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

4. Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\varphi\in Aut(V)$, wobei $\varphi^n=id$ für ein $n\ge 1$. Man zeige: Es gibt eine Zerlegung $V=V_1\oplus\ldots\oplus V_n$ so, dass $\varphi_j:=\varphi|V_j:V_j\to V_j$, und $\varphi_j(v)=e^{2\pi ij/n}\cdot v$ für $v\in V_j$.

5. Seien $A,B\in GL(n,\mathbb{C})$ mit $AB=BA$. Man zeige: Ist V_λ der Eigenraum zum Eigenwert λ von A, so ist $BV_\lambda\subset V_\lambda$. Man zeige ferner: Es gibt einen Vektor, der zugleich Eigenvektor von A und von B ist.