Serie 11

1. In der Vorlesung definierten wir das Signum $\operatorname{sig}(\sigma)$ der Permutation $\sigma \in S_n$ durch die Formel $\operatorname{sig}(\sigma) = \det(P_\sigma)$, wobei $P_\sigma = \big(\delta_{i,\sigma(j)}\big)_{i,j}$ die Permutationsmatrix von σ ist. Man beweise nun, dass

1. $$\operatorname{sig}(\sigma) = (-1)^u,$$
   wobei $u = \sharp\big\{(i,j) \mid i < j,\ \sigma(i) > \sigma(j)\big\}$ ist, sowie
2. $$\operatorname{sig}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

2. Man beweise:

1. $$\begin{vmatrix} b_1 & a & \cdots & \cdots & a \\ a & b_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b_{n-1} & a \\ a & \cdots & \cdots & a & b_n \end{vmatrix} = \big(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a}{b_j - a}\big) \prod_{i=1}^{n} (b_i - a),$$
   wobei $b_j \neq a$ für alle j;
2. $$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^{n-1}(x+n-1);$$
3. $$\begin{vmatrix} 1-p & 1 & 1 \\ 1 & 1-q & 1 \\ 1 & 1 & 1-r \end{vmatrix} = pqr\Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1\Big);$$

Bitte wenden!

4.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz;$$

5.
$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ab & b^2+1 & bc & bd \\ ac & bc & c^2+1 & cd \\ ad & bd & cd & d^2+1 \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2+1;$$

3. Für $A \in M(n \times n, K)$ schreiben wir $\widetilde{A}$ für ihre Adjunkte. Zeigen Sie folgende Aussagen (wobei $A, B \in M(n \times n, K)$):

1. $\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$;
2. $\det \widetilde{A} = \big(\det A\big)^{n-1}$;
3. $\widetilde{\widetilde{A}} = \big(\det A\big)^{n-2} A$;
4. $\widetilde{A} = 0$ genau dann, wenn $\mathrm{rg} A < n-1$;
5. die Matrix $Y \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ ist genau dann die Adjunkte einer Matrix, wenn $\mathrm{rg} Y \neq 2$;
6. Die Adjunkte der Matrix $\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} x_2x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_3x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1x_2 \end{pmatrix}$.