Serie 10

1. Man berechne die Determinante der folgenden Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) über dem Körper $\mathbb{R}$ und (2) über dem Körper $\mathbb{F}_5$.

2. Sei $A = (a_{ij})$ eine $(n \times n)$-Matrix. Man zeige:

$$\det\left((-1)^{i+j} a_{ij}\right) = \det A.$$

3. Man zeige, dass die Vektoren $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, i, 0)$, und $v_3 = (i, i, i)$ eine Basis von $\mathbb{C}^3$ bilden und man gebe eine Matrix $A \in M(3\times 3, \mathbb{C})$ an, mit $Av_i = w_i$, $i = 1, 2, 3$, wobei $w_1 = (i, 0, 0)$, $w_2 = (1 + i, i, 0)$, und $w_3 = (1 + i, 1 + i, i)$. Ferner berechne man $\det A$.

4. Sei K ein Körper und seien $a_1, \ldots, a_n \in K$. Man zeige die Formel von Vandermonde:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i \le j \le n} (a_j - a_i)\,.$$

5. Gegeben sind die fünf Polynome (der Aufgabe 2 der Serie 9)

$p_1(x) = x^3 + x^2$, $p_2(x) = x^2 - 2x - 4$, $p_3(x) = 3x + 4$, $p_4(x) = 2x + 3$, und $p_5(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$.

Man überprüfe die lineare Unabhängigkeit der Vektoren:

a) p_1, p_2, p_3, und p_4;

b) p_1, p_2, p_3, und p_5;

c) p_1, p_2, p_3, p_4, und p_5.