FUNKTIONENTHEORIE I
WS 04/05
Ö. Imamoḡlu

Serie 9
Abgabe: 14. Januar 2005

1. Sei $f : D \to D$ eine bijektive analytische Funktion der Einheitskreisscheibe. Angenommen es gibt ein $a \in D$, so dass $f(a) = 0$ gilt.

   Zeigen Sie, dass es dann ein $\theta \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $z \in D$ gilt:
$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

2. Sei f holomorphe Funktion in einer Umgebung von $\overline{B} := \overline{B(0,R)}$.

   Zeigen Sie, dass dann für alle $z \in B$
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\overline{B}} \frac{\Re(f(\zeta))}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\zeta + i\Im(f(0))$$
   gilt.

3. Sei f holomorphe Funktion in einer Umgebung von $\overline{B} := \overline{B(0,R)}$ und setze $u := \Re(f)$.

   Zeigen Sie, dass für alle $\varrho < R$ folgende Formel gilt:
$$u(\varrho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\psi})\frac{R^2-\varrho^2}{R^2-2\varrho R\cos(\psi-\varphi)+\varrho^2}d\psi.$$

Bitte wenden!

4. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine in einem Gebiet D stetige Funktion. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

   - Die Funktion ist holomorph in D.
   - Für jedes Dreieck $\Delta \subset G$ gilt: $\int_{\partial\Delta} f = 0$.
   - Die Funktion ist lokal-integrierbar in D.
   - Für jede Kreisscheibe B mit $\overline{B} \subset G$ gilt:
   $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\overline{B}} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$
   für alle $z \in B$.
   - Die Funktion ist um jeden Punkt $z_0 \in D$ in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar.

5. a) Sei γ ein glatter Weg in D und $g : (w, z) \mapsto g(w, z)$ eine stetige Funktion auf $|\gamma| \times D$. Außerdem nehmen wir an, dass für alle $w \in |\gamma|$ die Funktion $z \mapsto g(w, z)$ holomorph in D ist. Zeigen Sie, dass die Funktion h mit $h(z) := \int_\gamma g(w, z)dw$, $z \in D$ holomorph in D ist.

   b) Sei f holomorph in D. Definiere die Funktion g in $D \times D$ durch
   $$g(w, z) := \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, \quad \text{falls } w \neq z, \quad g(z, z) := f'(z).$$
   Zeigen Sie, dass g stetig auf $D \times D$ ist, und dass h mit $h(z) := \int_\gamma g(w, z)dw$, $z \in D$ holomorph in D ist.

6. Sei γ ein glatter geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und $G := \mathbb{C} - |\gamma|$. Definiere die Funktion $\nu : G \to \mathbb{C}$ durch
   $$\nu(a) := n(\gamma, a) = \int_\gamma \frac{dz}{z - a}.$$
   Zeigen Sie, dass ν stetig ist.

**Frohes Weihnachtsfest und
einen guten Rutsch in das Jahr 2005**