FUNKTIONENTHEORIE I
WS 04/05
Ö. Imamoglu

Serie 8
Abgabe: 17. Dezember

1. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $0 < R < \infty$. Ein Randpunkt w der Konvergenzkreisscheibe B heisst *singulärer Punkt*, falls es keine Umgebung U von w mit einer in U holomorphen Funktion h gibt, so dass $h|_{U\cap B} = f|_{U\cap B}$ gilt.

   Zeigen Sie, dass es immer mindestens einen singulären Punkt gibt.

2. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $0 < R < \infty$, so dass fast alle a_n reell und nicht negativ sind.

   Zeigen Sie, dass $w = R$ ein singulärer Punkt von f ist.

3. Sei eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit Konvergenzradius $0 < R < \infty$ gegeben.

   Zeigen Sie, dass für alle ϱ mit $0 < \varrho < R$

   $$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \varrho^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+\varrho e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \left(\max_{|z-z_0|=\varrho} |f(z)|\right)^2$$

   gilt.