

FUNKTIONENTHEORIE I

WS 04/05

Ö. Imamoglu

Serie 7

Abgabe: 10. Dezember

1. Sei f eine in einem Gebiet G stetige Funktion. Zeigen Sie, dass für eine Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- Die Funktion F ist holomorph in G und es gilt $F' = f$.
- Für je zwei Punkte $w, z \in G$ und jeden Weg γ , der die beiden Punkte verbindet (mit Startpunkt w und Endpunkt z), gilt

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = F(z) - F(w).$$

2. Sei γ eine glatte Kurve und ϕ eine auf $|\gamma|$ definierte stetige Abbildung. Für $z \notin |\gamma|$ definiere

$$F(z) := \int_{\gamma} \frac{\phi(w)}{w - z} dw.$$

Zeigen Sie, dass F analytisch auf $\mathbb{C} - |\gamma|$ ist, und dass

$$F'(z) = \int_{\gamma} \frac{\phi(w)}{(w - z)^2} dw$$

gilt.

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a)

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{2z + 1} dz$$

(b)

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 4)} dz,$$

wobei γ den Rand des Kreises vom Radius $R > 0$ um Null beschreibt.