FUNKTIONENTHEORIE I
WS 04/05
Ö. Imamoglu

Serie 6
Abgabe: 3. Dezember

1. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine zweimal reell differenzierbare Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ heisst harmonisch, falls $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) g = 0$ gilt.

   (a) Sei $f = u + iv$ holomorph in D, so dass u und v zweimal reell stetig differenzierbar sind.
   Zeigen Sie, dass u und v harmonische Funktionen sind.

   (b) Sei f eine holomorphe Funktion ohne Nullstelle in D.
   Beweisen Sie, dass $z \mapsto \log|f(z)|$ auf D harmonisch ist.

2. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $B := B(z_0, r)$ der (offene) Kreis vom Radius r um z_0.
   Zeigen Sie, dass
   $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \bar{B}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in B \\ 0 & \text{falls } z \in \mathbb{C} - \bar{B} \end{cases}$$
   gilt.

3. Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale in der komplexen Ebene.

   (a)
   $$\int_{\partial\Delta} |z|^2 dz,$$
   wobei $\partial\Delta$ der Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(1,0), (-1,0)$ und $(0,1)$ ist.

   (b)
   $$\int_{\gamma} \frac{z+1}{z} dz,$$
   wobei der Weg γ den linken Halbkreis mit Radius eins um Null beschreibt.

   (c)
   $$\int_{\gamma} (x^2 - iy^3) dz,$$
   wobei $z = x + iy$ und der Weg γ den oberen Halbkreis mit Radius eins um Null beschreibt.