FUNKTIONENTHEORIE I
WS 04/05
Ö. Imamoglu

Serie 5
Abgabe: 26. November

1. (a) Für zwei komplexe Zahlen z, w definieren wir $< z, w > := \Re(z\bar{w})$. Eine injektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heisst winkeltreu, falls für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt, dass

$$|w| \cdot |z| < T(w), T(z) > = |T(w)| \cdot |T(z)| < w, z > .$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für eine injektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ äquivalent sind:

   i. T ist winkeltreu.
   ii. Es gibt $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ entweder $T(z) = \lambda z$ oder $T(z) = \lambda \bar{z}$
   iii. Es gibt $t \in \mathbb{R}^{>0}$ so dass $< T(w), T(z) > = t < w, z >$ gilt.

   (b) Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ ein reell stetig differenzierbare Funktion. Sei f winkeltreu, d.h., für jeden Punkt in G ist das Differential eine winkeltreue Abbildung.

Beweisen Sie, dass dann f entweder holomorph in G ist und dass f' keine Nullstellen in G hat, oder dass f antiholomorph in G ist und dass $\bar{f}'$ keine Nullstellen in G hat.

2. Sei $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

Zeigen Sie, dass f winkeltreu in $\mathbb{C}^* - \{-1, 1\}$ ist. Bestimmen Sie das Bild der Kreislinien mit Radius $R < 1$ unter der Abbildung f.

3. Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und z_2, z_3, z_4 seien voneinander verschieden. Dann gibt es genau eine Möbiustransformation $DV(\_, z_2, z_3, z_4)$, welche z_2 auf 1, z_3 auf 0 und z_4 auf ∞ abbildet. Das Bild $DV(z_1, z_2, z_3, z_4)$ von z_1 unter dieser Abbildung heisst das Doppelverhältnis der vier Punkte.

Zeigen Sie, dass $DV(z_1, z_2, z_3, z_4)$ genau dann reell ist, wenn die vier Punkte auf einer Kreislinie liegen.