FUNKTIONENTHEORIE I
WS 04/05
Ö. Imamoglu

Serie 4
Abgabe: 19. November

1. Beweisen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt :

$$\exp\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}\Big) = 1 + z\,.$$

2. (a) Zeigen Sie, dass sin und cos nur reelle Nullstellen haben.

   (b) Zeigen Sie, dass gleichmässig in x

$$\begin{array}{rcl} \lim_{t\to\pm\infty} |\cos(x+it)| & = & \infty \\ \lim_{t\to\pm\infty} |\sin(x+it)| & = & \infty. \end{array}$$

   gilt.

3. Sei $t \in \mathbb{R}^{>0}$ und bezeichne mit $\log(t)$ den reellen Logarithmus und für $t \in \mathbb{R}$ mit $\arctan(t)$ den reellen Arcustangens, wobei wir die Werte in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ wählen. Für $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) = 0\}$ sei die Funktion l gegeben durch

$$l(z) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\arctan(\frac{y}{x}).$$

   (a) Zeigen Sie, dass l komplex differenzierbar in $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) = 0\}$ ist und dass dort $l'(z) = \frac{1}{z}$ gilt.

   (b) Zeigen Sie, dass in der linken Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0\}$

$$\exp(l(z)) = -z$$

   gilt, und dass in der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$

$$\exp(l(z)) = z$$

   gilt.