FUNKTIONENTHEORIE I
WS 04/05
Ö. Imamoglu

Serie 3
Abgabe: 12. November

1. (a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}.$$

Erfüllt f die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen? Ist f differenzierbar?

(b) Sei f definiert durch $f(z) = f(x+iy) = xy+ixy$. Wo ist f is differenzierbar und wo analytisch?

2. (a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ eine reell differenzierbare Funktion. Definiere $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Zeigen Sie, dass f genau dann holomorph ist, wenn $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ identisch null ist.

(b) Bestimmen Sie die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen für eine holomorphe Funktion der Form $f(z) = U(r,\theta) + iV(r,\theta)$ mit $z = re^{i\theta}$. Geben Sie f' in Termen der partiellen Ableitungen von U und V an.

(c) Zeigen Sie, dass $f(z) = z^n$ die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen erfüllt und dass $f'(z) = nz^{n-1}$ gilt.

3. Sei $f = u + iv$ eine analytische Funktion in einer zusammenhängenden offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$, wobei u und v reellwertig sind. Angenommen es gibt reelle Konstanten a, b, c mit $a^2 + b^2 \neq 0$ und $au + bv = c$ in D. Zeigen Sie, dass f konstant in D ist.