FUNKTIONENTHEORIE I
WS 04/05
Ö. Imamoglu

Serie 2

Abgabe: 5. November in den Fächern HG G 33.4

1. Es sei $\{z_n\}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $z_n = x_n + iy_n$.

   a) Zeigen Sie, dass $\{z_n\}$ genau dann gegen $z = x + iy$ konvergiert, wenn die Folgen der Realteile $\{x_n\}$ und Imaginärteile $\{y_n\}$ gegen x, resp. y konvergieren.

   b) Zeigen Sie, dass falls $\{|z_n|\}$ gegen r und $\{\arg z_n\}$ gegen ϕ konvergiert, so folgt $\{z_n\} \to r(\cos\phi + i\sin\phi)$.

   c) Zeigen Sie, dass falls $\{z_n\}$ gegen z konvergiert, so gilt $\{|z_n|\} \to |z|$.

   d) Sei nun $z_n = -1 + (-1)^n \frac{i}{n}$. Dann konvergiert $\{z_n\}$ gegen -1. Sei ϕ_n das Argument von z_n mit $-\pi < \phi_n < \pi$, und sei Φ_n das Argument von z_n mit $\pi/2 < \Phi_n < 3\pi/2$.

   Zeigen Sie, dass $\{\phi_n\}$ NICHT konvergiert, wohl aber die Folge $\{\Phi_n\}$ und zwar $\{\Phi_n\} \to \pi$.

2. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

3. Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradius R_1, resp. R_2. Zeigen Sie, dass für den Konvergenzradius R der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ die Ungleichung $R \geq R_1 R_2$ gilt.