**FUNKTIONENTHEORIE I**
WS 04/05
Ö. Imamoḡlu

**Serie 13**

1. Sei $f$ eine analytische Funktion auf einer offenen Menge, welche den abgeschlossenen Kreis $\overline{B(a;R)}$ enthält. Außerdem sei $f$ injektiv auf $B(a;R)$. Es sei $\Omega = f(B(a;R))$ das Bild und $\gamma$ die Kreislinie, welche den Rand $\partial\overline{B(a;R)}$ beschreibt.

   Zeigen Sie, dass für jedes $\omega \in \Omega$ das Urbild $f^{-1}(w)$ durch
$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)-w}dz$$
   gegeben ist.

2. Sei $a$ eine komplexe Zahl mit $a \notin \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass dann
$$\frac{1}{a} + \sum_{n\geq 1} \frac{2a}{a^2 - n^2} = \pi \cot(\pi a)$$
   gilt.

3. Wir betrachten die Funktion $f$ definiert durch $f(z) = \dfrac{1}{\sin(1/z)}$.
   (a) Berechnen die Residuen bei allen Pole von $f$.
   (b) Finden Sei eine stückweise $C^1-$ Kurve $\gamma$, so dass
$$\int_\gamma f(z)\, dz = \frac{5i}{8\pi}$$
   gilt.
   (c) Hat $f$ ein Residuum bei $z = 0$ ?

4. Bestimmen Sie alle biholomorphen Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

**Bitte wenden!**

5. Sei $f$ eine ganze nichtkonstante Funktion.

   Beweisen Sie, dass die Bildmenge $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt.

6. Sei $f$ eine biholomorphe Funktion der offenen Einheitskreisscheibe auf sich, mit $f(0) = 0$.

   Beweisen Sie, dass $f$ eine Drehung ist.

7. Bestimmen Sie die Laurententwicklungen von

$$f(z) = \frac{3z^2 + (6-2i)z - 3i}{z(z-i)(z+3)}$$

   auf den Kreisringen

   (a) $K_1 := \{z \in \mathbb{C} |\ 0 < |z| < 1\}$,

   (b) $K_2 := \{z \in \mathbb{C} |\ 1 < |z| < 3\}$ und

   (c) $K_3 := \{z \in \mathbb{C} |\ 3 < |z|\}$.

8. Sei

$$f : z \mapsto \frac{(z+3)\sin z}{(z+1-2i)(z+2+2i)}$$

   eine auf einer offenen Umgebung des Ursprungs definierte Funktion und

$$a_n := \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

   Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

**Die Lösungen werden Sie auf der homepage für die Vorlesung finden.**

**Schöne Ferien.**