FUNKTIONENTHEORIE I
WS 04/05
Ö. Imamoḡlu

Serie 12
Abgabe: 4. Februar

1. Sei $f(z) := \tan(z)$ und $g(z) := \tan(z)\tanh(z)$.
   (a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten und Residuen von f und g.
   (b) Berechnen Sie die Integrale $\displaystyle\int_{|z|=10} \tan(z)\,dz$ und $\displaystyle\int_{|z-\frac{\pi}{2}(1+i)|=2} \tan(z)\tanh(z)\,dz$.

2. (a) Berechnen Sie die Residuen von $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ in allen isolierten Singularitäten.
   (b) Sei $R > 0$ und γ_R die durch $\gamma_R(t) := -R + 2Rt$ $(t \in [0,1])$ parametrisierte Kurve und δ_R die durch $\delta_R(t) := Re^{i\pi t}$ $(t \in [0,1])$ parametrisierte Kurve. Berechnen Sie
   $$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\delta_R} f(z)\,dz$$
   mit Hilfe des Residuenkalküls.
   (c) Verwenden Sie den Limes $R \to +\infty$, um $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ zu berechnen.

3. (a) Zeigen Sie, dass alle Nullstellen des Polynoms $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ mit
   $$p(Z) = 12Z^{12} - 4Z^9 + 2Z^6 - 4Z^3 + 1$$
   innerhalb des Einheitskreises liegen.
   (b) Berechnen Sie das Intgegral
   $$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{z^{11}}{12z^{12} - 4z^9 + 2z^6 - 4z^3 + 1} dz.$$

Bitte wenden!

4. Wir definieren die Riemannsche Zeta Funktion durch

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}.$$

(a) Beweisen Sie, dass die obige Reihe auf $U := \{z \in \mathbb{C} | \Re(z) > 1\}$ konvergiert.

(b) Bestimmen Sie alle Singularitäten und Residuen von $f(z) := \frac{1}{z^2(e^z-1)}$.

(c) Sei m eine ganze Zahl und R_m der Rand des Rechtecks mit den Eckenpunkten $(2m+1)\pi(\pm 1 \pm i)$. Berechnen Sie $\int_{R_m} f(z)\, dz$ mit Hilfe des Residuensatzes.

(d) Beweisen Sie die Formel $\lim_{m\to+\infty} \int_{R_m} f(z)\, dz = 0$ und leiten Sie damit den Wert von $\zeta(2)$ her.

5. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi \frac{\cos(4\theta)}{1+\cos^2(\theta)} d\theta.$$

6. Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx$$

verschwindet.