FUNKTIONENTHEORIE I
WS 04/05
Ö. Imamoḡlu

Serie 11
Abgabe: 28. Januar

1. Sei D ein Gebiet und $z_0 \in D$ eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f : D - \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Sei $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ die Laurentreihenentwicklung von f um z_0.

   Zeigen Sie, dass dann die folgenden Charakterisierungen der isolierten Singularität z_0 gelten:

   - Die Singularität ist genau dann hebbar, wenn $a_n = 0$ für $n < 0$.
   - Die Singularität ist genau dann ein Pol der Ordnung $m \geq 1$, wenn $a_n = 0$ für $n < -m$ und $a_{-m} \neq 0$.
   - Die Singularität ist genau dann wesentlich, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$.

2. Sei D ein Gebiet und $a \in D$ eine wesentliche Singularität einer holomorphen Funktion $f : D - \{a\} \to \mathbb{C}$.

   Zeigen Sie, dass für alle $\epsilon > 0$ das Bild von $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < \epsilon\}$ unter f dicht in $\mathbb{C}$ liegt, das heisst, der Abschluss von $f(\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < \epsilon\})$ ist die ganze komplexe Ebene.

3. Bestimmen Sie die Laurentreihe der Funktion f gegeben durch $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ bezüglich der folgenden Gebiete:

   (a) $\{z : 0 < |z| < 1\}$,
   (b) $\{z : 1 < |z| < 2\}$,
   (c) $\{z : |z| > 2\}$,
   (d) $\{z : 1 < |z-2| < 2\}$.